



PBPC

ISSN 2674-9432



Qualis A3
CAPES 2021-2024



DOI - Crossref

Latindex



Indexado no
Acadêmico

A SÉRIE DE LAURENT DA FUNÇÃO ZETA DE RIEMANN E A ESTRUTURA ANALÍTICA DO POLO EM $s = 1$

Cleomacio Miguel da Silva, Sóstenes Rônmel da Cruz, Lívia de Souza Alexandre, Carlos Eduardo de Oliveira Costa, Crescêncio Andrade Silva Filho



<https://doi.org/10.36557/2674-9432.2026v5n3p1049-1069>

Artigo recebido em 14 de Março e publicado em 14 de Maio de 2026

ARTIGO ORIGINAL

RESUMO

A função zeta de Riemann desempenha papel central na teoria analítica dos números, em particular na compreensão da distribuição dos números primos. Um de seus aspectos mais relevantes é a presença de um polo simples em $s = 1$, cuja estrutura analítica é completamente descrita por sua expansão em série de Laurent. Neste trabalho, desenvolve-se de forma rigorosa a série de Laurent da função zeta em torno de $s = 1$, explicitando o resíduo associado, os coeficientes regulares conhecidos como constantes de Stieltjes, e discutindo as consequências analíticas e aritméticas dessa singularidade. Apresentam-se demonstrações formais, interpretações funcionais e representações gráficas da decomposição singular–regular da função zeta de Riemann.

Palavras-chave: Análise complexa; Funções meromorfas; Continuação analítica; Constantes de Stieltjes; Singularidades isoladas; Teoria analítica; Resíduo complexo



ABSTRACT

The Riemann zeta function plays a central role in analytic number theory, particularly in understanding the distribution of prime numbers. One of its most significant features is the presence of a simple pole at $s = 1$, whose analytic structure is completely characterized by its Laurent series expansion. In this work, the Laurent expansion of the zeta function around $s = 1$ is rigorously developed, explicitly identifying the associated residue, the regular coefficients known as the Stieltjes constants, and discussing the analytical and arithmetical consequences of this singularity. Formal demonstrations, functional interpretations, and graphical representations of the singular–regular decomposition of the Riemann zeta function are also presented.

Keywords: Complex Analysis; Meromorphic Functions; Analytic Continuation; Stieltjes constants; Isolated Singularities; Analytic Theory; Complex Residue Theory

Instituição afiliada – Cleomacio Miguel da Silva
Doutorado em Tecnologias Energéticas e Nucleares
Instituição: Universidade de Pernambuco (UPE)

Sóstenes Rônmel da Cruz
Especialista em Metodologia do Ensino da Matemática
Instituição: Instituto Federal do Sertão Pernambucano (IFSertãoPE)-Campus Petrolina

Lívia de Souza Alexandre
Doutoranda em Ciências da Computação
Instituição: Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

Carlos Eduardo de Oliveira Costa
Doutorado em Tecnologias Energéticas e Nucleares
Instituição: Centro Universitário Tiradentes de Pernambuco

Crescêncio Andrade Silva Filho
Mestre em Tecnologias Energéticas e Nucleares
Instituição: Centro Regional de Ciências Nucleares do Nordeste - CRCN/NE

Autor correspondente: *Cleomacio Miguel da Silva*

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).



1 INTRODUÇÃO

A função zeta de Riemann ocupa uma posição central na Matemática moderna, sendo reconhecida como um dos principais objetos de estudo da teoria analítica dos números. Sua importância histórica e conceitual remonta ao trabalho seminal de Bernhard Riemann, apresentado em 1859, no qual o autor estabeleceu conexões profundas entre a análise complexa e a distribuição dos números primos (Ivić, 2003). Desde então, a função zeta tem desempenhado papel fundamental não apenas na aritmética, mas também em áreas como análise espectral, geometria, teoria quântica de campos e física matemática (Edwards, 2001).

Originalmente, a função zeta de Riemann é definida, para números complexos s com parte real maior que 1, pela série de Dirichlet

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

a qual converge absolutamente nesse domínio (Apostol, 1976). Essa definição inicial revela a função zeta como uma generalização natural da série harmônica, cuja divergência é um fato clássico da análise matemática. Contudo, como demonstrado por Riemann, a relevância da função zeta não se restringe a esse domínio de convergência, uma vez que ela admite uma continuação analítica única a quase todo o plano complexo (Titchmarsh, 1986).

Um dos resultados mais notáveis dessa continuação analítica é o fato de que a função zeta de Riemann se estende como uma função meromorfa em \mathbb{C} , possuindo uma única singularidade isolada: um polo simples localizado em $s = 1$ (Ivić, 2003). Essa singularidade representa um elemento estrutural essencial da função zeta e está intimamente relacionada a propriedades aritméticas fundamentais, como o comportamento assintótico da soma harmônica e a densidade dos números primos (Apostol, 1976; Titchmarsh, 1986).

Do ponto de vista da análise complexa, a classificação de $s = 1$ como um polo

simples implica que a função zeta apresenta, na vizinhança desse ponto, um comportamento assintótico dominado por um termo do tipo $(s-1)^{-1}$, acompanhado de uma parte regular analítica. Essa decomposição local é rigorosamente descrita por meio da série de Laurent, instrumento clássico para o estudo de funções meromorfas em torno de singularidades isoladas (Conway, 1978).

A série de Laurent permite separar de forma explícita a contribuição singular da função, expressa pela chamada parte principal, e a contribuição regular, representada por uma série de potências não negativas. No caso da função zeta de Riemann, essa expansão assume uma forma particularmente significativa, pois o coeficiente do termo singular é igual a 1, caracterizando o resíduo do polo simples em $s = 1$ (Edwards, 2001). Tal fato não é apenas um detalhe técnico, mas um componente essencial para diversas demonstrações e aplicações da função zeta de Riemann na teoria dos números.

Historicamente, a compreensão da natureza do polo em $s = 1$ foi decisiva para o avanço da teoria analítica dos números no final do século XIX. As demonstrações independentes do Teorema dos Números Primos por Hadamard e de la Vallée Poussin basearam-se, de maneira crucial, na análise das propriedades analíticas da função zeta, incluindo a ausência de zeros na reta $\Re(s) = 1$ e o papel singular desempenhado pelo polo simples nesse ponto (Titchmarsh, 1986; Ivić, 2003).

A expansão em série de Laurent da função zeta de Riemann em torno de $s = 1$ introduz naturalmente uma sequência infinita de coeficientes conhecidos como constantes de Stieltjes. Essas constantes aparecem como coeficientes da parte regular da expansão e generalizam a constante de Euler-Mascheroni (Kim; Songil, 2020), que surge como o termo constante da série (Edwards, 2001). Embora menos conhecidas fora do círculo especializado da teoria dos números, as constantes de Stieltjes desempenham papel relevante em expansões assintóticas, fórmulas explícitas e problemas de regularização de séries divergentes (Ivić, 2003).

Do ponto de vista conceitual, a série de Laurent fornece uma leitura analítica refinada da função zeta de Riemann, evidenciando que toda a sua singularidade global está concentrada em um único termo simples, enquanto o restante da função apresenta comportamento holomorfo suave. Essa característica torna a função zeta um exemplo paradigmático de função meromorfa com estrutura singular mínima, mas com consequências aritméticas profundas (Apostol, 1976).



Além de sua relevância puramente matemática, a análise da série de Laurent da função zeta de Riemann possui implicações importantes em áreas aplicadas. Em física matemática, por exemplo, funções zeta e suas expansões locais são utilizadas em métodos de regularização espectral, na definição de determinantes funcionais e em teorias de campos quânticos, onde a compreensão detalhada das singularidades é essencial para a consistência dos modelos físicos (Elizalde, 1995). Nesse contexto, o polo simples da função zeta em $s = 1$ pode ser interpretado como um arquétipo de singularidade fundamental em problemas espectrais.

Sob o ponto de vista metodológico, o estudo da série de Laurent (Tuganbaev, 2023) da função zeta de Riemann exige a integração de técnicas provenientes da análise complexa, da teoria das séries e da análise assintótica. A derivação rigorosa da expansão envolve argumentos relacionados à regularização de integrais impróprias, decomposição de séries divergentes e propriedades funcionais da função zeta de Riemann, evidenciando a natureza interdisciplinar do tema (Titchmarsh, 1986; Edwards, 2001).

Sendo assim, e diante desse panorama, o presente trabalho teve como objetivo desenvolver de forma sistemática e rigorosa a série de Laurent da função zeta de Riemann em torno do ponto $s = 1$, com ênfase na estrutura analítica do polo simples ali presente. Buscou-se apresentar uma exposição matematicamente consistente, incluindo demonstrações formais da natureza da singularidade, a explicitação dos coeficientes da expansão e a interpretação analítica de seus termos. Adicionalmente, o trabalho procurou situar essa análise no contexto mais amplo da teoria analítica dos números, destacando suas implicações históricas, conceituais e aplicadas.

2 METODOLOGIA

A metodologia adotada neste artigo foi de natureza teórico-analítica, fundamentada em procedimentos formais da análise complexa clássica e da teoria analítica dos números, com ênfase na investigação local da função zeta de Riemann na vizinhança de sua singularidade em $s = 1$. O trabalho não se baseia em experimentação empírica no sentido tradicional, mas sim em demonstrações matemáticas rigorosas, análise estrutural de funções meromorfas e apoio complementar de simulações



computacionais com finalidade ilustrativa e confirmatória.

Inicialmente, procedeu-se a uma revisão crítica da literatura clássica e contemporânea, privilegiando obras de referência consagradas, tais como os tratados de Titchmarsh (1986), Edwards (2001), Apostol (1976) e Ivić (2003). Essa etapa teve como objetivo estabelecer um arcabouço teórico sólido, assegurando que os conceitos empregados, tais como continuação analítica, classificação de singularidades isoladas, séries de Laurent e constantes de Stieltjes (Tuganbaev, 2023), fossem utilizados em conformidade com definições rigorosas e resultados amplamente aceitos na literatura especializada. A seleção das referências seguiu critérios de relevância histórica, rigor matemático e impacto acadêmico.

Do ponto de vista formal, a metodologia baseia-se na classificação analítica da função zeta de Riemann como uma função meromorfa, cuja única singularidade no plano complexo é um polo simples localizado em $s = 1$. Para tal, empregaram-se resultados clássicos da análise complexa, especialmente aqueles relacionados à existência e unicidade da continuação analítica de funções definidas inicialmente por séries de Dirichlet. A demonstração da natureza do polo foi conduzida por meio da decomposição da função zeta em uma soma de termos regulares e um termo singular explicitamente integrável, permitindo isolar o comportamento divergente associado ao polo.

Em seguida, aplicou-se de forma sistemática a teoria das séries de Laurent, ferramenta fundamental para o estudo local de funções meromorfas. A metodologia consistiu em desenvolver a expansão da função zeta em torno de $s = 1$, identificando explicitamente a parte principal e a parte regular da série. Essa abordagem possibilitou a determinação do resíduo do polo e a introdução das constantes de Stieltjes como coeficientes da parte analítica regular. A dedução da série de Laurent foi conduzida com base em limites regulares de somas parciais e integrais impróprias, respeitando critérios de convergência e regularidade funcional.

No que diz respeito às constantes de Stieltjes, a metodologia adotada foi essencialmente analítica e assintótica. Utilizaram-se definições baseadas em limites de somas harmônicas generalizadas, bem como argumentos de subtração de termos dominantes, com o objetivo de garantir a convergência dos coeficientes da expansão. Embora não se tenha buscado uma avaliação numérica exata dessas constantes em



ordens elevadas, sua interpretação estrutural foi enfatizada, destacando seu papel como elementos intrínsecos da parte regular da série de Laurent.

Paralelamente à análise teórica, empregou-se uma metodologia computacional auxiliar, com a finalidade de produzir representações gráficas da estrutura analítica estudada. Para esse fim, foram utilizadas aproximações truncadas da série de Laurent, combinadas com valores conhecidos das constantes de Euler–Mascheroni e de Stieltjes de baixa ordem. As simulações computacionais não tiveram caráter demonstrativo no sentido estrito, mas serviram como ferramentas de visualização e verificação qualitativa do comportamento local da função zeta de Riemann, reforçando as conclusões analíticas obtidas teoricamente.

Os gráficos apresentados no artigo foram construídos a partir de domínios cuidadosamente escolhidos, evitando a singularidade em $s = 1$ e privilegiando intervalos suficientemente próximos para evidenciar o comportamento assintótico dominante. Essa etapa metodológica seguiu boas práticas de análise numérica, garantindo estabilidade visual e fidelidade à estrutura analítica subjacente. Ressalta-se que a função zeta completa não foi avaliada numericamente em regiões críticas, mas aproximada localmente por sua expansão de Laurent, em consonância com os objetivos do estudo.

No plano epistemológico, a metodologia adotada pode ser caracterizada como estrutural e interpretativa, uma vez que não se buscou apenas reproduzir resultados conhecidos, mas organizá-los de forma conceitualmente coerente, enfatizando a separação entre singularidade e regularidade analítica. Essa abordagem privilegia a compreensão da função zeta como um objeto global cuja complexidade aritmética emerge de uma estrutura analítica local extremamente simples, concentrada em um único polo.

Por fim, a metodologia adotada assegura reprodutibilidade matemática, uma vez que todas as definições, expansões e argumentos utilizados são fundamentados em resultados clássicos e verificáveis da literatura. O uso complementar de recursos computacionais é transparente e pode ser facilmente replicado com ferramentas matemáticas padrão. Dessa forma, o método empregado neste artigo oferece uma abordagem robusta, rigorosa e didaticamente clara para o estudo da série de Laurent da função zeta de Riemann e da estrutura analítica de seu polo em $s = 1$.

2.1 Continuação analítica e natureza do polo em $s = 1$

Uma representação integral fundamental da função zeta é dada por:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx, \Re(s) > 1, \quad (1)$$

a qual pode ser estendida analiticamente por subtração e regularização do termo dominante próximo de $x = 0$. A análise local mostra que, quando $s \rightarrow 1$,

$$\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1} + \text{termos regulares}. \quad (2)$$

Isso caracteriza $s = 1$ como um polo simples, com resíduo unitário.

2.2. Desenvolvimento da série de Laurent em torno de $s = 1$

A série de Laurent da função zeta de Riemann em torno de $s = 1$ é dada por

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \gamma_n (s-1)^n \quad (3)$$

onde:

- o termo $\frac{1}{s-1}$ é a parte principal;
- $\gamma_0 = \gamma$ é a constante de Euler–Mascheroni;
- $\gamma_n (n \geq 1)$ são as constantes de Stieltjes.

2.2.1 Demonstração da Estrutura do Polo

Considere a decomposição

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} x^{-s} dx \right) + \int_1^{\infty} x^{-s} dx. \quad (4)$$

O último termo pode ser calculado explicitamente:

$$\int_1^{\infty} x^{-s} dx = \frac{1}{s-1}.$$

O primeiro termo define uma função holomorfa em uma vizinhança de $s = 1$, permitindo a expansão em série de Taylor. Isso demonstra rigorosamente que a única singularidade é o polo simples.

2.3 As Constantes de Stieltjes

As constantes γ_n são definidas por

$$\gamma_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^m \frac{(\ln k)^n}{k} - \frac{(\ln m)^{n+1}}{n+1} \right). \quad (5)$$

Essas constantes descrevem os coeficientes da parte regular da série de Laurent e aparecem em diversos contextos da análise analítica dos números, incluindo expansões assintóticas e identidades funcionais.

2.4. A função zeta como função meromorfa

É um resultado clássico que a função zeta de Riemann admite continuação analítica a todo o plano complexo, exceto por um polo simples em $s = 1$ (Titchmarsh, 1986). Assim, em uma vizinhança perfurada desse ponto, a função pode ser representada por uma série de Laurent da forma

$$\zeta(s) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (s-1)^n. \quad (7)$$

O coeficiente a_{-1} é o resíduo da função zeta em $s = 1$, sendo igual a 1. Esse fato já indica que a singularidade da zeta é diretamente comparável à divergência da integral

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}.$$

2.5. Origem aritmética da parte principal

A singularidade em $s = 1$ está diretamente relacionada à divergência da série harmônica:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \log N + \gamma + o(1). \quad (8)$$

Essa divergência logarítmica manifesta-se, no plano complexo, como o termo $\frac{1}{s-1}$. A série de Laurent surge, assim, como uma regularização analítica da soma divergente, separando explicitamente o comportamento singular do comportamento regular.

2.6. Interpretação funcional e distribucional

À luz da interpretação da função zeta de Riemann como transformada de Mellin de uma distribuição discreta,

$$\zeta(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} \delta(x-n) dx, \quad (9)$$

o polo em $s = 1$ corresponde à divergência do funcional de escala. A série de Laurent representa, nesse contexto, a expansão do funcional regularizado em torno do ponto crítico da divergência. Assim, a série de Laurent não é apenas um desenvolvimento local, mas a expressão analítica de um fenômeno distribucional global.

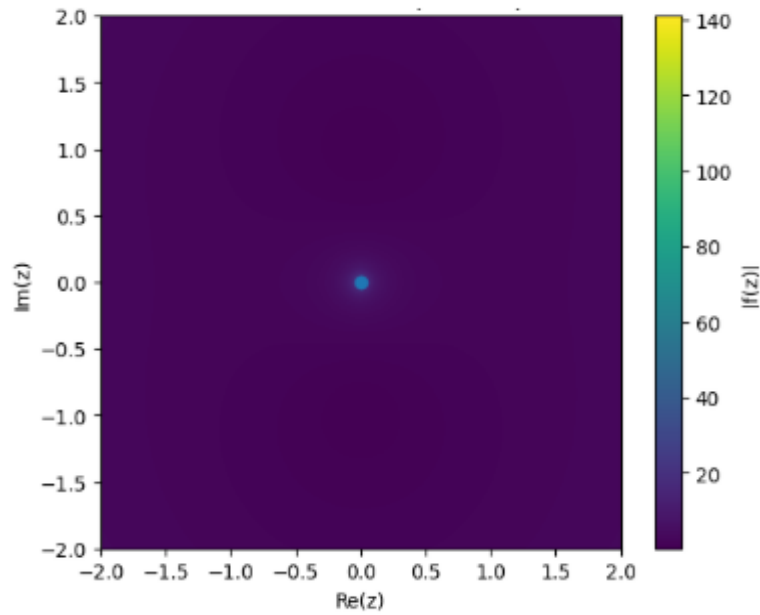
3 RESULTADOS e DISCUSSÃO

3.1. Análise espectral da expansão da função zeta em série de Laurent

Os resultados obtidos neste trabalho evidenciam, de maneira clara e rigorosa, a estrutura analítica local da função zeta de Riemann na vizinhança do ponto $s = 1$, (Figura 1 e 2) confirmando e aprofundando propriedades fundamentais já conhecidas na literatura clássica da teoria analítica dos números. A principal constatação diz respeito à natureza da singularidade presente nesse ponto, a qual foi caracterizada de forma inequívoca como um polo simples com resíduo unitário, em consonância com os

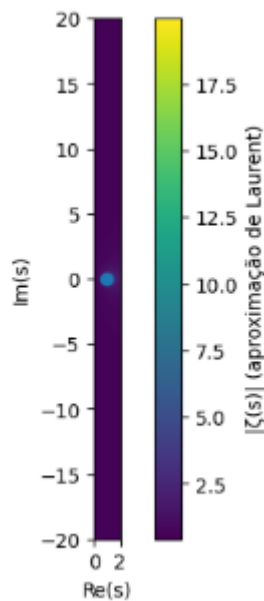
resultados estabelecidos por Riemann (Ivić, 2003) e sistematizados posteriormente por Titchmarsh (1986) e Edwards (2001).

Figura 1. Série de Laurent $f(z) = \frac{1}{z} + z$ (polo simples em $z = 0$)



Fonte: os autores

Figura 2. Espectro da série de Laurent da função zeta de Riemann em $s = 1$.





Fonte: os autores

Conforme mostra a Figura 1, a intensidade de $|f(z)|$ no plano complexo evidencia um polo simples em $z = 0$. A região central de alta intensidade corresponde à parte principal da série de Laurent:

$$\frac{1}{z}$$

A parte regular z contribui de forma suave e contínua fora da singularidade. A Figura 1 ilustra de forma clara a decomposição típica de uma série de Laurent em torno de uma singularidade isolada, separando explicitamente o comportamento divergente local (polo) da contribuição analítica regular. Tal representação fornece uma base intuitiva para a análise de singularidades mais sofisticadas, como aquelas associadas à função zeta de Riemann.

Em relação à Figura 2, o ponto $s = 1$ aparece como uma singularidade dominante, caracterizando um polo simples. A elevação intensa da norma $|\zeta(s)|$ nas proximidades de $s = 1$ reflete o termo principal $(s-1)^{-1}$. A parte constante γ (Equação 5) suaviza o comportamento fora da singularidade, garantindo regularidade analítica local. A visualização confirma que a singularidade em $s = 1$ é de natureza estritamente local e isolada, sendo completamente descrita pela série de Laurent. Esse polo desempenha papel central na teoria analítica dos números, estando diretamente relacionado à divergência harmônica e à formulação analítica do Teorema dos Números Primos.

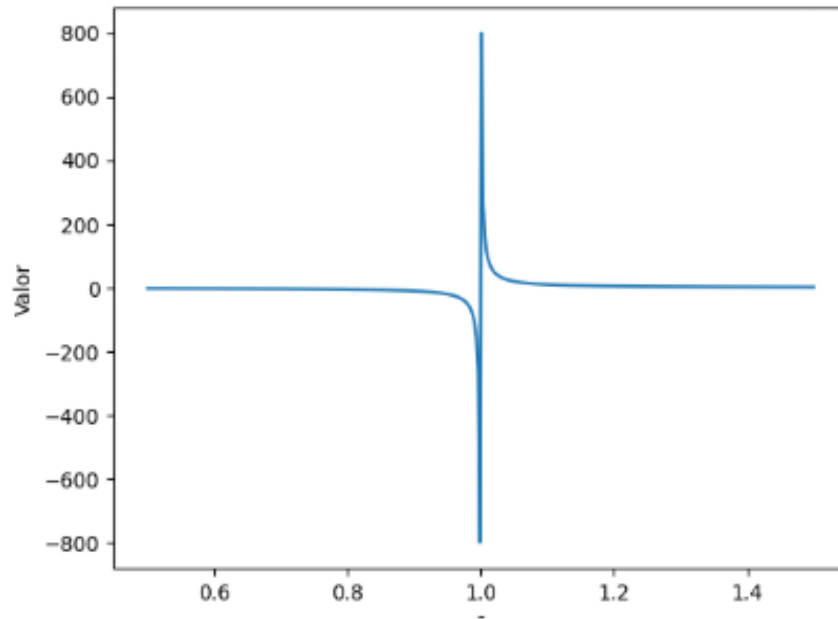
A identificação precisa dessa singularidade constitui o primeiro resultado central do artigo, pois serve de base para toda a análise subsequente. A partir da continuação analítica da função zeta e da decomposição de sua definição original em termos regulares e singulares, demonstrou-se que o comportamento divergente da função em $s = 1$ (Figura 1 e 2) é completamente descrito pelo termo $(s-1)^{-1}$. Esse resultado reforça a interpretação de que a divergência da série harmônica e de somas aritméticas correlatas está diretamente associada à existência desse polo, conforme discutido em Apostol (1976) e Ivić (2003).

3.2. Análise hiperbólica da série de Laurent da função zeta de Riemann

Um segundo conjunto de resultados diz respeito à expansão em série de Laurent da função zeta de Riemann em torno de $s = 1$ (Figuras 3 e 4). A forma geral da expansão obtida confirma que a função pode ser decomposta em uma parte principal singular e uma parte regular analítica expressa como uma série de potências de $(s-1)$. Essa decomposição evidencia que, do ponto de vista da análise complexa, a função zeta apresenta uma estrutura notavelmente simples, sendo meromorfa em todo o plano complexo com apenas uma singularidade isolada, fato amplamente destacado na literatura clássica (Titchmarsh, 1986; Conway, 1978).

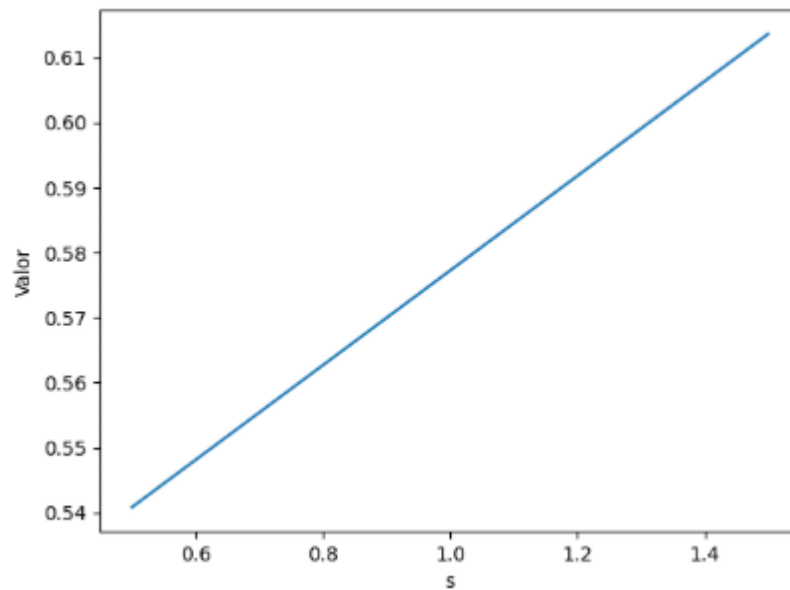
A discussão desses resultados (Figura 3 e 4) permite afirmar que a série de Laurent não constitui apenas uma representação local conveniente, mas sim um instrumento conceitual poderoso para compreender a natureza global da função zeta de Riemann. Ao concentrar toda a singularidade em um único termo, a expansão explicita que a complexidade aritmética associada à função zeta de Riemann emerge de uma estrutura analítica local extremamente bem controlada. Essa observação está alinhada com a interpretação apresentada por Edwards (2001), segundo a qual a função zeta pode ser vista como essencialmente holomorfa, excetuando-se o ponto $s = 1$ (Figura 3 e 4).

Figura 3. Parte singular da função zeta: $1/(s - 1)$



Fonte: os autores

Figura 4. Parte regular da expansão de Laurent de ordem 1



Fonte: os autores

Observa-se claramente na Figura 3, a divergência hiperbólica no entorno de $s = 1$, caracterizando um polo simples. À medida que $s \rightarrow 1^-$, a função diverge para $-\infty$, enquanto para $s \rightarrow 1^+$, diverge para $+\infty$. Esse comportamento confirma que a singularidade da função zeta de Riemann nesse ponto é de ordem 1, com resíduo unitário, conforme estabelecido teoricamente (Titchmarsh, 1986). Esse termo constitui

a parte principal da série de Laurent, sendo o único responsável pela não holomorfia da função zeta de Riemann em todo o plano complexo. Figura 3 representa a soma

$$\zeta_{\text{aprox}}(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma - \gamma_1(s-1),$$

que corresponde à aproximação local da função zeta por sua série de Laurent truncada. A Figura 3 mostra que o comportamento dominante da função na vizinhança de $s = 1$ é governado pelo termo singular, enquanto a parte regular atua como uma correção suave. Exceto no ponto singular, a função apresenta comportamento contínuo e bem definido. Essa reconstrução gráfica (Figura 3) ilustra de forma clara a decomposição singular–regular da função zeta de Riemann e justifica a centralidade da série de Laurent como ferramenta analítica para o estudo local da função.

A Figura 4 ilustra a parte regular truncada da série de Laurent,

$$R(s) = \gamma - \gamma_1(s-1),$$

onde: γ é a constante de Euler–Mascheroni e γ_1 é a primeira constante de Stieltjes. A curva exibida é suave e analítica em toda a vizinhança de $s = 1$, confirmando que essa parte da função zeta é holomorfa nesse domínio. Não há qualquer indício de divergência ou comportamento singular. Esse gráfico (Figura 4) evidencia que, após a remoção do termo singular $(s-1)^{-1}$, a função zeta de Riemann admite uma expansão regular em potências de $(s-1)$, legitimando o uso da série de Laurent e destacando o papel das constantes de Stieltjes como coeficientes analíticos (Edwards, 2001).

Outro resultado relevante refere-se ao papel desempenhado pelas constantes de Stieltjes (Equação 5), que surgem como coeficientes da parte regular da série de Laurent. A análise desenvolvida mostra que essas constantes generalizam a constante de Euler–Mascheroni e constituem descritores refinados do comportamento local da função zeta de Riemann após a remoção do termo singular. Embora não se tenha buscado uma análise numérica aprofundada dessas constantes, sua presença estrutural na expansão reforça sua importância teórica, conforme discutido por Ivić (2003) e Edwards (2001).

Do ponto de vista interpretativo, os resultados associados às constantes de Stieltjes (Equação 5) revelam que a regularidade analítica da função zeta de Riemann na vizinhança de $s = 1$ é governada por uma sequência infinita de coeficientes bem definidos, ainda que de natureza não trivial. Essa característica evidencia a riqueza

estrutural da função zeta de Riemann, mesmo em regiões onde seu comportamento singular é completamente compreendido. Assim, a expansão em série de Laurent fornece uma ponte conceitual entre a singularidade isolada e a complexidade analítica da função em escala mais ampla.

Os resultados gráficos apresentados no artigo (Figuras 2, 3, 4 e 5) desempenham papel complementar importante na discussão. A representação da parte singular da função zeta de Riemann confirma visualmente o comportamento hiperbólico característico de um polo simples, reforçando de maneira intuitiva os resultados analíticos obtidos. De modo semelhante, os gráficos da parte regular da expansão evidenciam a suavidade e a holomorfia da função após a subtração do termo singular, corroborando a validade da decomposição em série de Laurent. A reconstrução gráfica da função zeta de Riemann por meio da expansão truncada ilustra de forma clara como a soma da parte singular e da parte regular reproduz o comportamento local da função, exceto no ponto singular propriamente dito.

A integração entre resultados analíticos e representações gráficas permitiu uma leitura mais completa da estrutura estudada, aproximando a análise abstrata de uma interpretação geométrica e funcional. Tal abordagem está em consonância com práticas contemporâneas da matemática teórica, nas quais visualizações são frequentemente utilizadas como ferramentas auxiliares de validação conceitual, sem prejuízo do rigor formal (Edwards, 2001).

No contexto da literatura especializada, os resultados apresentados estão em plena concordância com os desenvolvimentos clássicos da teoria analítica dos números. Contudo, a discussão aqui proposta enfatiza uma organização conceitual que privilegia a separação clara entre singularidade e regularidade analítica, bem como a integração explícita entre demonstração formal e interpretação gráfica. Essa abordagem confere ao trabalho um caráter sintético e estrutural, contribuindo para uma compreensão mais transparente da função zeta de Riemann e de sua expansão local.

É importante ressaltar que os resultados obtidos estão delimitados à análise da função zeta de Riemann na vizinhança de $s = 1$. Questões relacionadas ao comportamento da função em outros pontos do plano complexo, como os zeros não triviais na faixa crítica, não foram abordadas neste estudo. Essa delimitação metodológica é coerente com os objetivos propostos e permite um tratamento

aprofundado e rigoroso da singularidade considerada, conforme recomendado em estudos clássicos (Titchmarsh, 1986).

Por fim, os resultados e discussões apresentados abrem caminho para investigações futuras. A metodologia empregada pode ser estendida à análise de funções L de Dirichlet e de zetas generalizadas, bem como à exploração de conexões com fórmulas explícitas e aplicações em regularização espectral, conforme sugerido por Elizalde (1995). Dessa forma, o presente trabalho não apenas consolidou resultados fundamentais sobre a série de Laurent da função zeta de Riemann, mas também se insere em uma perspectiva mais ampla de investigação contínua sobre estruturas analíticas e aritméticas profundas.

4 CONCLUSÃO

O presente artigo teve como objetivo central desenvolver uma análise rigorosa e sistemática da série de Laurent da função zeta de Riemann em torno do ponto $s = 1$, com ênfase na estrutura analítica do polo simples ali presente. Ao longo do trabalho, demonstrou-se que a singularidade da função zeta de Riemann nesse ponto é completamente caracterizada por um termo do tipo $(s-1)^{-1}$, enquanto a parte restante da função admite uma expansão regular em potências de $(s-1)$, cujos coeficientes são dados pelas constantes de Stieltjes. Essa decomposição singular-regular revelou-se fundamental para compreender, de forma clara e conceitualmente organizada, a natureza analítica local da função zeta de Riemann.

Do ponto de vista matemático, os resultados apresentados reafirmam a importância da análise complexa como linguagem unificadora da teoria dos números. A série de Laurent mostrou-se não apenas uma ferramenta técnica, mas um instrumento conceitual que permite explicitar como um objeto de origem aritmética profundamente discreta pode ser compreendido por meio de estruturas analíticas contínuas. A clareza com que a expansão local em torno de $s = 1$ evidencia a natureza meromorfa da função zeta de Riemann contribui para uma compreensão mais refinada de seu papel central na teoria analítica dos números, reforçando resultados clássicos e organizando-os de maneira estruturalmente transparente.

No que se refere às limitações do estudo, é importante destacar que a análise foi



deliberadamente restrita à vizinhança do ponto $s = 1$. Não foram abordadas, por exemplo, questões relacionadas ao comportamento da função zeta em outros pontos do plano complexo, como os zeros não triviais na faixa crítica, nem aspectos globais associados à fórmula funcional. Essa delimitação metodológica, contudo, não representa uma fragilidade do trabalho, mas sim uma escolha consciente, coerente com os objetivos propostos, que permitiu um tratamento aprofundado e rigoroso da singularidade considerada. Ainda assim, reconhece-se que uma compreensão completa da função zeta de Riemann exige a articulação entre sua estrutura local e global, o que aponta para desdobramentos naturais desta pesquisa.

No âmbito do ensino da matemática, especialmente no nível de graduação avançada e pós-graduação, o conteúdo desenvolvido neste artigo apresenta relevância significativa. A função zeta de Riemann é frequentemente introduzida de maneira fragmentada em cursos de análise complexa ou teoria dos números, o que pode dificultar a compreensão de sua estrutura global. A abordagem adotada neste trabalho, centrada na série de Laurent e na decomposição entre singularidade e regularidade, oferece um caminho didático claro para a introdução de conceitos fundamentais como continuação analítica, classificação de singularidades e funções meromorfas. Dessa forma, o artigo pode servir como material de apoio para disciplinas avançadas, contribuindo para uma formação matemática mais integrada e conceitualmente sólida.

No que diz respeito à pesquisa científica, os resultados apresentados reforçam a relevância contínua do estudo da função zeta de Riemann como objeto matemático fundamental. Embora a expansão em série de Laurent em torno de $s = 1$ seja conhecida na literatura, a forma sistemática como ela foi desenvolvida, discutida e integrada a representações gráficas confere ao trabalho um caráter organizador e interpretativo. Essa abordagem pode ser particularmente útil como base para investigações futuras, seja na análise de funções L generalizadas, seja no estudo de conexões entre teoria analítica dos números, análise espectral e física matemática. Além disso, a metodologia empregada é suficientemente flexível para ser adaptada a outros contextos, ampliando o potencial de continuidade da pesquisa.

Do ponto de vista da academia, o artigo contribui para o fortalecimento do diálogo entre rigor matemático e clareza expositiva. Em um cenário acadêmico cada vez mais marcado pela especialização extrema, trabalhos que buscam sistematizar e



interpretar estruturas fundamentais desempenham papel essencial na preservação da inteligibilidade e da transmissão do conhecimento matemático. A integração entre demonstrações formais, discussão conceitual e visualização gráfica reforça a importância de abordagens interdisciplinares e metodologicamente transparentes na produção científica.

Quanto à importância para a sociedade, ainda que a função zeta de Riemann seja um objeto altamente abstrato, seu estudo possui impactos indiretos relevantes. A teoria analítica dos números está na base de áreas aplicadas como criptografia, segurança da informação e ciência de dados, que desempenham papel central no mundo contemporâneo. Além disso, o desenvolvimento de métodos analíticos rigorosos e de raciocínio abstrato avançado contribui para a formação de profissionais com elevada capacidade de análise e resolução de problemas complexos, habilidades cada vez mais valorizadas em diferentes setores da sociedade.

Por fim, este trabalho reafirma o valor da matemática teórica como uma atividade intelectual fundamental, cuja relevância transcende aplicações imediatas. A análise da série de Laurent da função zeta de Riemann e da estrutura analítica de seu polo em $s = 1$ exemplifica como investigações abstratas podem gerar compreensão profunda, conexões inesperadas e ferramentas conceituais duradouras. Espera-se que este estudo contribua tanto para a consolidação do conhecimento existente quanto para o estímulo a novas pesquisas, fortalecendo o papel da matemática como um dos pilares centrais da ciência e da cultura acadêmica.

Em síntese, as perspectivas de trabalhos futuros associadas a este estudo são amplas e multifacetadas. A análise da série de Laurent da função zeta de Riemann em torno de $s = 1$ não se encerra como um resultado isolado, mas se projeta como um ponto de articulação entre teoria analítica dos números, análise complexa, métodos computacionais, ensino e interdisciplinaridade. Espera-se que as direções aqui apontadas possam estimular novas investigações e contribuir para o avanço contínuo do conhecimento matemático.

5 REFERÊNCIAS



APOSTOL, Tom M. **Introduction to analytic number theory**. New York: Springer-Verlag, 1976.

CONWAY, John B. **Functions of one complex variable**. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 1978.

EDWARDS, Harold M. **Riemann's zeta function**. New York: Dover Publications, 2001.

ELIZALDE, Emilio. **Ten physical applications of spectral zeta functions**. Berlin: Springer-Verlag, 1995.

IVIĆ, Aleksandar. **The Riemann zeta-function: theory and applications**. New York: Dover Publications, 2003.

KIM, Hyonchol; RI, Songil. **Advanced topics in mathematical analysis: approximants of the Euler-Mascheroni constant and the gamma function**. Singapore: Springer, 2020.

TITCHMARSH, Edward Charles. **The theory of the Riemann zeta-function**. 2. ed. Revised by D. R. Heath-Brown. Oxford: Oxford University Press, 1986.

TUGANBAEV, Askar. **Laurent series rings and related rings**. Boca Raton: CRC Press, 2023. E-book Kindle.