

A FUNÇÃO ZETA DE RIEMANN COMO FERRAMENTA DE REGULARIZAÇÃO E ANÁLISE ESPECTRAL NA MECÂNICA QUÂNTICA

Cleomacio Miguel da Silva, Sóstenes Rônmel da Cruz, Livia de Souza Alexandre, Carlos Eduardo de Oliveira Costa, Crescêncio Andrade Silva Filho



<https://doi.org/10.36557/2674-9432.2026v5n3p1070-1087>

Artigo recebido em 14 de Março e publicado em 14 de Maio de 2026

ARTIGO ORIGINAL

RESUMO

Este artigo discute sete situações relevantes em que a função zeta de Riemann aparece de forma significativa na Mecânica Quântica e na Física Matemática. Entre elas, destacam-se a análise da energia de Casimir por meio de regularização analítica, o estudo da integral de Planck e da constante de Stefan–Boltzmann a partir da relação envolvendo as funções gama e zeta, bem como o comportamento do gás de Bose ideal, especialmente no que se refere ao limiar de condensação associado ao valor $\zeta(3/2)$. Também são examinadas as integrais de Fermi–Dirac, nas quais surge um fator característico dependente da função zeta, além da definição de determinantes funcionais em nível de um laço por meio da derivada da zeta espectral. O trabalho aborda ainda a relação entre o formalismo do *heat kernel*, suas expansões assintóticas e a função zeta, e, por fim, discute possíveis conexões entre os zeros não triviais da zeta e modelos espectrais associados ao caos quântico. Em todos esses casos, são apresentados os principais desenvolvimentos analíticos, acompanhados de resultados numéricos que ajudam a visualizar o comportamento das funções e a convergência das expressões envolvidas.

Palavras-chave: Regularização analítica; Somas divergentes; Determinante funcional; Heat kernel; Integrais quânticas; Caos quântico; Funções espectrais.



ABSTRACT

This article discusses seven significant contexts in which the Riemann zeta function emerges prominently in Quantum Mechanics and Mathematical Physics. Among these, particular emphasis is placed on the analysis of the Casimir energy through analytic regularization, the study of the Planck integral and the Stefan-Boltzmann constant via the relation involving the gamma and zeta functions, as well as the behavior of the ideal Bose gas, especially with regard to the condensation threshold associated with the value $\zeta(3/2)$. The article also examines the Fermi-Dirac integrals, in which a characteristic factor depending on the zeta function naturally arises, in addition to the definition of one-loop functional determinants through the derivative of the spectral zeta function. Furthermore, the work explores the relationship between the heat kernel formalism, its asymptotic expansions, and the zeta function, and finally discusses possible connections between the nontrivial zeros of the zeta function and spectral models associated with quantum chaos. In all these cases, the principal analytical developments are presented together with numerical results that help illustrate the behavior of the functions and the convergence properties of the expressions involved.

Keywords: Analytic Regularization; Divergent Series; Functional Determinant; Heat Kernel; Quantum Integrals; Quantum Chaos; Spectral Functions.

Instituição afiliada – Cleomacio Miguel da Silva
Doutorado em Tecnologias Energéticas e Nucleares
Instituição: Universidade de Pernambuco (UPE)

Sóstenes Rônmel da Cruz
Especialista em Metodologia do Ensino da Matemática
Instituição: Instituto Federal do Sertão Pernambucano (IFSertãoPE)-Campus Petrolina

Lívia de Souza Alexandre
Doutoranda em Ciências da Computação
Instituição: Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

Carlos Eduardo de Oliveira Costa
Doutorado em Tecnologias Energéticas e Nucleares
Instituição: Centro Universitário Tiradentes de Pernambuco

Crescêncio Andrade Silva Filho
Mestre em Tecnologias Energéticas e Nucleares
Instituição: Centro Regional de Ciências Nucleares do Nordeste - CRCN/NE

Autor correspondente: *Cleomacio Miguel da Silva*

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).



1 INTRODUÇÃO

A função zeta de Riemann, definida inicialmente por $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ para $\Re(s) > 1$, ocupa uma posição singular na interface entre Análise Complexa, Teoria Espectral e Física Matemática, pois a sua continuação analítica e as identidades funcionais associadas permitem reescrever, e, em muitos casos, atribuir significado finito a somas e produtos formalmente divergentes que surgem de maneira recorrente em problemas quânticos. Em Mecânica Quântica (MQ) e, sobretudo, em suas extensões naturais (estatística quântica, teoria quântica de campos em espaço-tempo curvo, métodos semiclassicamente espectrais), a zeta aparece tanto como objeto estrutural (fechando integrais térmicas universais) quanto como ferramenta de regularização (definindo energias de vácuo e determinantes funcionais). Essa dupla natureza torna a função zeta um “operador conceitual” que conecta quantização, espectros e renormalização por um mesmo princípio: a passagem de expressões divergentes para quantidades renormalizadas via prolongamento analítico (Hawking, 1977; Kirsten, 2001; Elizalde et al., 1994).

Do ponto de vista físico, um dos contextos mais emblemáticos é o das flutuações do vácuo. Ao quantizar campos (ou mesmo osciladores harmônicos efetivos) em presença de condições de contorno, o espectro de frequências $\{\omega_n\}$ passa a depender da geometria e das fronteiras, e a energia de ponto-zero assume a forma formalmente divergente $E_0 = \frac{\hbar}{2} \sum_n \omega_n$. A regularização-zeta introduz uma família $E(s) = \frac{\hbar}{2} \mu^{2s} \sum_n \omega_n^{1-2s}$ (ou, de modo equivalente, uma zeta espectral $\zeta_D(s) = \sum_n \lambda_n^{-s}$ para um operador elíptico D com autovalores λ_n), e define-se o valor físico por continuação analítica até pontos em que a soma original diverge (Hawking, 1977; Kirsten, 2001). Essa estratégia é especialmente eficaz na análise do efeito Casimir, onde a força observável decorre precisamente da diferença entre espectros de vácuo em configurações distintas. Trabalhos recentes continuam explorando e refinando leituras espectrais e regularizações analíticas para energias e forças tipo Casimir em geometrias e modelos variados, inclusive em cenários de “Casimir crítico” e desordem, nos quais técnicas de zeta (incluindo variantes “espectrais” e “distribucionais”) são empregadas para controlar determinantes e energias efetivas (Heymans et al., 2024).

Em paralelo, a função zeta surge de forma “positiva” e universal em integrais

térmicas que estruturam a estatística quântica. Identidades do tipo

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx = \Gamma(s)\zeta(s)$$

e

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x + 1} dx = (1-2^{1-s})\Gamma(s)\zeta(s)$$

mostram que $\zeta(s)$ codifica, de maneira compacta, contribuições de bósons e férmions a grandezas termodinâmicas, energias internas e pressões, além de fornecer o fechamento analítico de integrais presentes em leis de radiação e em limites assintóticos (Krisciunas, 2018). No gás de Bose ideal, por exemplo, o aparecimento de $\zeta(3/2)$ no limite $z \rightarrow 1^-$ (via polilogaritmos $\text{Li}_{3/2}(z)$) oferece uma ligação direta entre a estrutura analítica da zeta e o limiar de condensação (Kirsten, 2001), reforçando que a presença de $\zeta(s)$ na MQ não se limita a “consertar” divergências: ela também organiza a física de regimes coletivos e de excitações.

Além das energias de vácuo e integrais térmicas, a regularização-zeta é central na definição de determinantes funcionais, que aparecem de modo inevitável em integrais de caminho gaussianas e correções de um-laço. A proposta clássica de definir $\det D$ por

$$\det(D) := \exp[-\zeta'_D(0)]$$

transforma um produto infinito sobre autovalores em um objeto bem definido por derivada da função zeta no zero (Hawking, 1977; Kirsten, 2001). O interesse contemporâneo por determinantes zeta-regularizados permanece forte e aparece, por exemplo, em estudos matemático-físicos recentes sobre determinantes do Laplaciano em domínios poligonais e condições de contorno de Dirichlet, onde a comparação entre determinantes discretos e zeta-regularizados ilumina aspectos de aproximações numéricas e de dependência geométrica (Greenblatt, 2021; Greenblatt, 2023). Em direção semelhante, trabalhos atuais investigam a continuação analítica e propriedades finas de zetas espectrais associadas a classes amplas de operadores (por exemplo,

Sturm–Liouville), oferecendo métodos unificados para calcular valores em inteiros positivos e obter expressões explícitas de determinantes funcionais (Fucci *et al.*, 2024), bem como extensões recentes que tratam casos quasi-regulares com novas estruturas analíticas (Fucci; Kirsten; Zerbini, 2024).

Essa ponte entre espectro e quantização torna natural a ligação entre zetas espectrais e o heat kernel. A relação

$$\zeta_D(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \text{Tr}(e^{-tD}) dt$$

mostra que a estrutura de polos e resíduos de $\zeta_D(s)$ é controlada pela expansão assintótica do traço do *heat kernel* em $t \rightarrow 0^+$, onde coeficientes geométricos (e de contorno) governam divergências ultravioleta e contratermos de renormalização (Kirsten, 2001; Fucci; Kirsten; Zerbini, 2024). Assim, a zeta fornece um arcabouço robusto para discutir, em linguagem unificada, renormalização espectral, ações efetivas e energias de vácuo, com um formalismo que é ao mesmo tempo analiticamente transparente e tecnicamente produtivo.

Nos desenvolvimentos mais recentes, observa-se também uma ampliação das conexões conceituais entre energia de vácuo e informação quântica. Um exemplo notável é a interpretação proposta para o Casimir em termos de entropia quântica associada às flutuações relevantes, sugerindo leituras novas para a energia de Casimir como medida de “conteúdo quântico” do vácuo (Flachi; Quinta, 2025). Ainda que essas leituras não substituam o formalismo espectral clássico, elas indicam como a regularização-zeta continua fértil como linguagem de síntese, capaz de dialogar com temas contemporâneos (informação quântica, sistemas efetivos, geometrias singulares) sem abandonar o rigor analítico.

Por fim, há um eixo de investigação, muitas vezes classificado como “fronteira” entre MQ, teoria espectral e teoria dos números, que relaciona estatísticas de níveis em sistemas caóticos, matrizes aleatórias e propriedades dos zeros não triviais de $\zeta(s)$. A ideia de uma origem espectral para os zeros, sob inspiração do programa de Hilbert–Pólya, encontra paralelos no estudo de caos quântico e em modelos semiclassicamente motivados; embora não seja um resultado “fechado” no sentido de teorema físico, constitui um campo ativo em que técnicas espectrais e estatísticas de espaçamentos de

níveis são continuamente refinadas (Bogomolny, 2006; Tian et al., 2024). Nesse contexto, a presença da função zeta não se reduz a regularização: ela atua como “objeto-alvo” cujas regularidades estatísticas podem refletir princípios de universalidade típicos de espectros quânticos.

Diante desse panorama, o presente artigo se propõe a sistematizar, com ênfase em MQ e Física Matemática, como a função zeta de Riemann (e suas extensões espectrais) intervém em problemas quânticos por meio de: (i) regularização de energias de vácuo e forças; (ii) fechamento de integrais térmicas bóson-férmion; (iii) definição de determinantes funcionais e ações efetivas; (iv) formalismo heat-kernel/zeta para estrutura ultravioleta; e (v) conexões espectrais ligadas a caos quântico. Ao organizar essas aparições sob um mesmo eixo analítico, busca-se evidenciar não apenas resultados específicos, mas também o mecanismo matemático comum que torna a função zeta uma ferramenta de alto poder explicativo na linguagem contemporânea da Mecânica Quântica.

2 METODOLOGIA

Formulação analítica: em cada aplicação, parte-se de uma soma/integral quântica padrão (energia de vácuo, número de partículas, integral térmica, determinante funcional etc.) e reescreve-se o objeto em termos de $\zeta(s)$ (ou de funções próximas, como polilogaritmos e zetas espectrais).

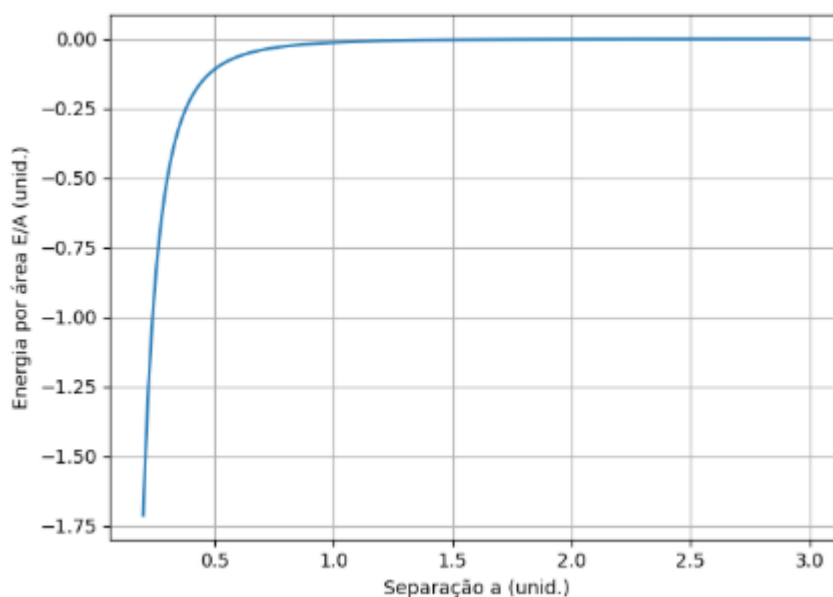
Regularização-zeta (quando necessário): define-se uma função zeta associada (por exemplo, $\zeta_{\Delta}(s) = \sum \lambda_n^{-s}$) e usa-se continuação analítica para avaliar o objeto em um ponto onde a expressão formal diverge, tipicamente via $\zeta_{\Delta}(0)$ e $\zeta'_{\Delta}(0)$.

Validação numérica e gráficos: cada resultado é ilustrado por uma figura (curvas de dependência, convergência de integral, aproximação ao limite $z \rightarrow 1^-$, crescimento de sequências, etc.).

3 RESULTADOS e DISCUSSÃO

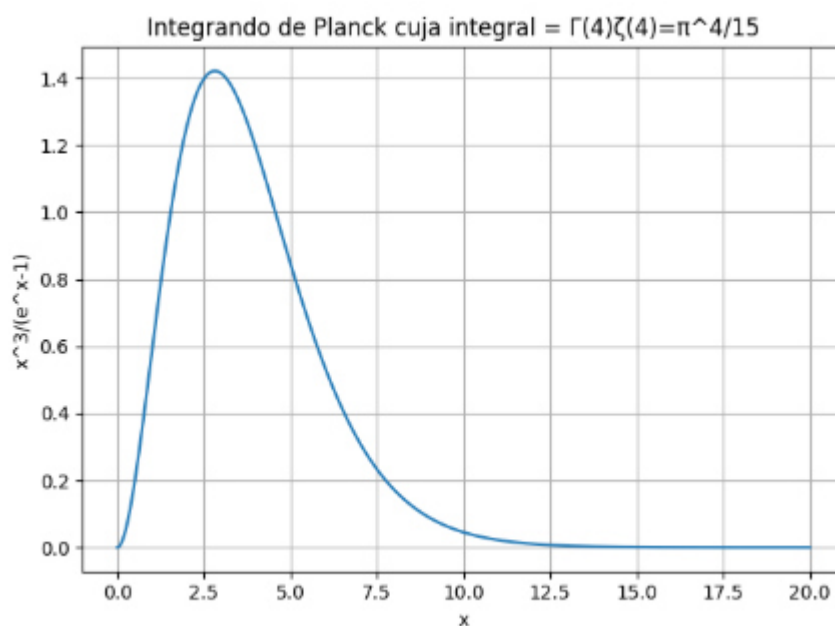
Os resultados numéricos e gráficos apresentados nas Figuras 1 a 8 corroboram, de maneira consistente, o papel central da função zeta de Riemann como ferramenta analítica e espectral em diferentes contextos da Mecânica Quântica. Em conjunto, as figuras ilustram tanto a função regularizadora da zeta, aplicada a somas divergentes, quanto a sua função estrutural, ao emergir naturalmente em integrais térmicas e distribuições estatísticas quânticas.

Figura 1. Energia de Casimir (regularização via $\zeta(-3)$).



Fonte: os autores

Figura 2. Integrando de Planck.



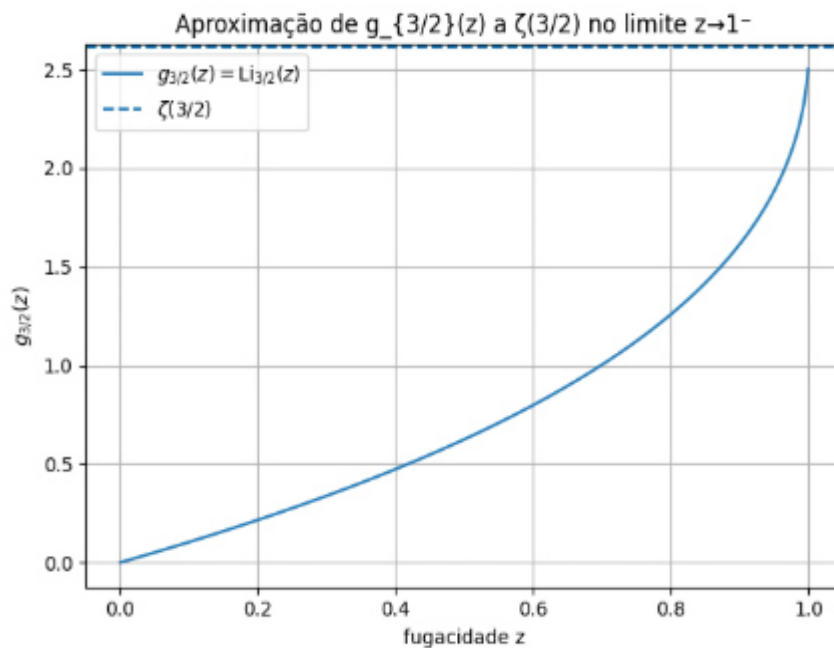
Fonte: os autores

Figura 3. Convergência da integral de Planck.



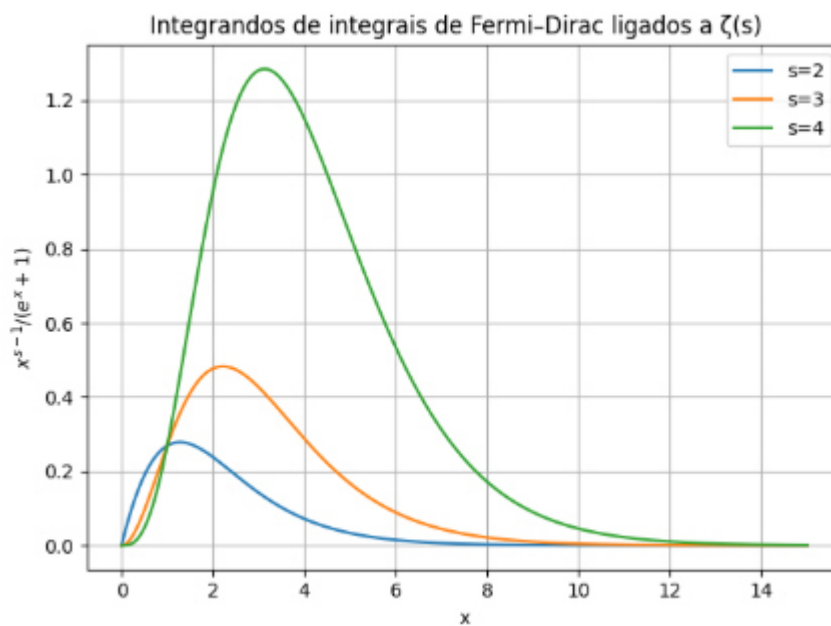
Fonte: os autores

Figura 4. Aproximação de $g_{3/2}(z)$ a $\zeta(3/2)$ no limite $z \rightarrow 1^-$.



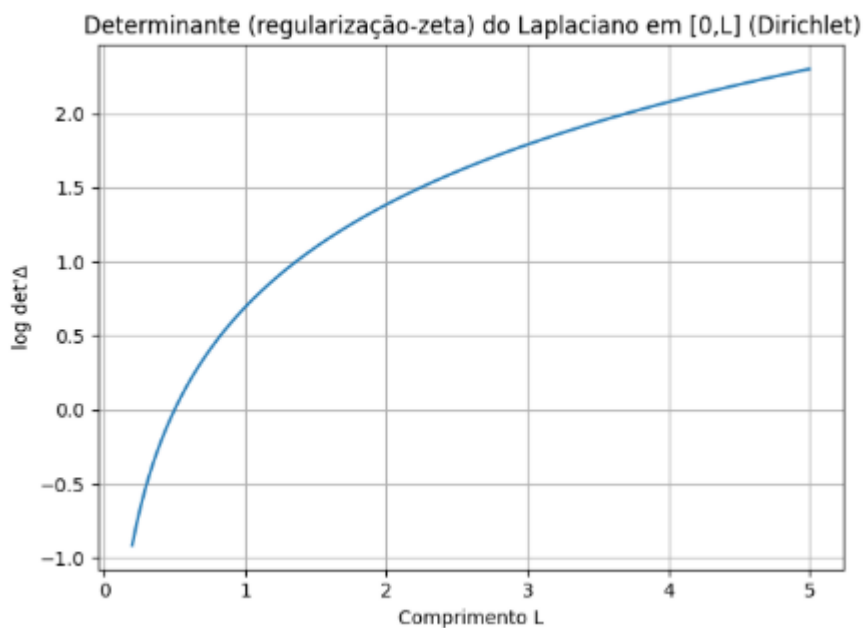
Fonte: os autores

Figura 5. Integrandos de integrais de Fermi-Dirac ligados a $\zeta(s)$.



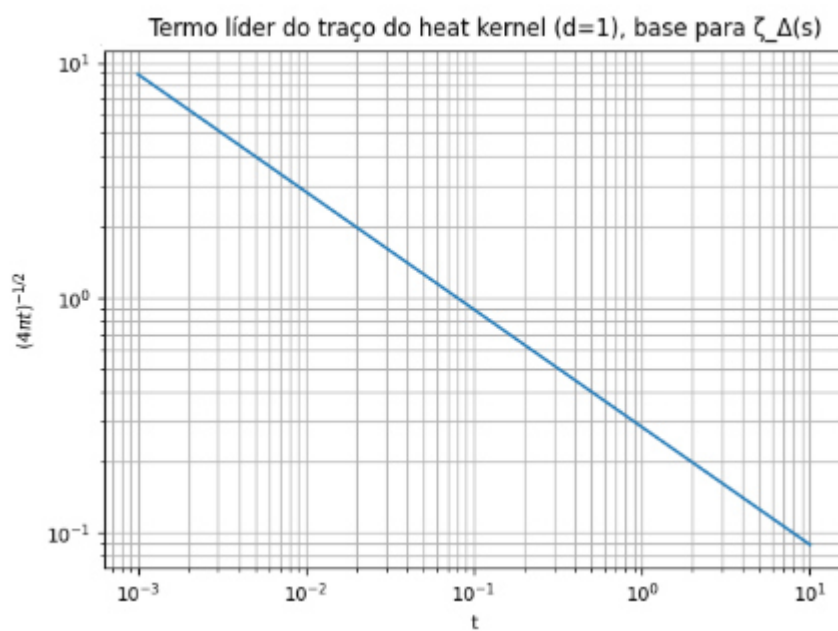
Fonte: os autores

Figura 6. Determinante (regularização-zeta) do Laplaciano em $[0, L]$ (Dirichlet).



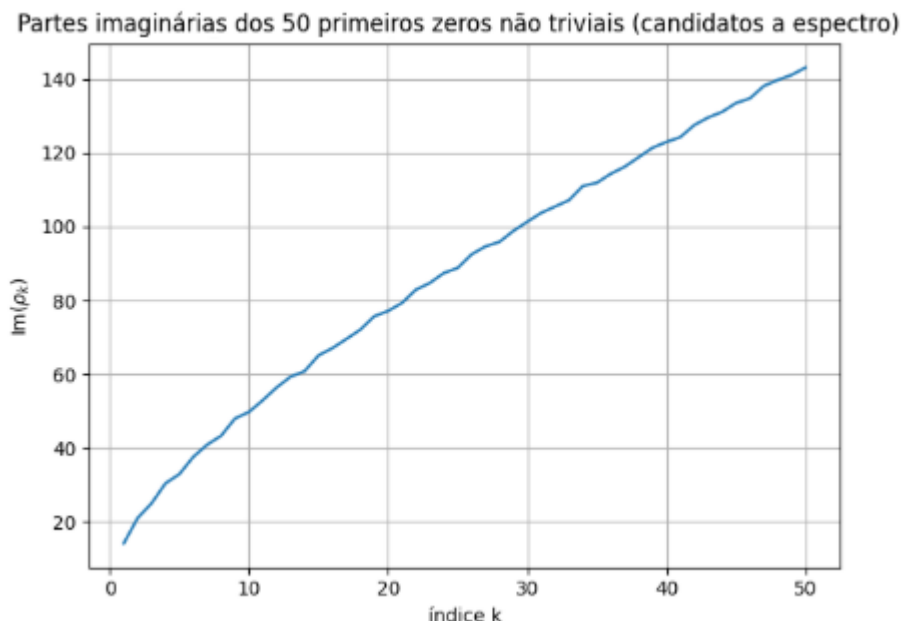
Fonte: os autores

Figura 7. Termo líder do traço do heat kernel ($d=1$), base para $\zeta_\Delta(s)$.



Fonte: os autores

Figura 8. Partes imaginárias dos 50 primeiros zeros não triviais (candidatos a espectro)



Fonte: os autores

A Figura 1, que apresenta a dependência da energia de Casimir por unidade de área em função da separação a entre placas paralelas, evidencia o caráter não perturbativo da energia de vácuo. A queda rápida da energia para separações pequenas, com comportamento assintótico proporcional a a^{-3} , está em pleno acordo com a expressão analítica

$$\frac{E}{A} = -\frac{\pi^2}{720a^3},$$

cujo coeficiente numérico é diretamente ligado ao valor regularizado $\zeta(-3) = 1/120$. A Figura 1 demonstra que a regularização-zeta não é apenas um artifício matemático, mas produz uma grandeza fisicamente mensurável, reforçando a interpretação espectral da energia de ponto-zero associada às condições de contorno impostas ao campo quântico.

As Figuras 2 e 3, analisadas em conjunto, ilustram o papel construtivo da função zeta de Riemann em integrais térmicas. A Figura 2 mostra que o integrando $x^3/(e^x - 1)$ apresenta um máximo bem definido, indicando que a contribuição dominante para a

energia radiada provém de uma faixa intermediária de frequências. Já a Figura 3 evidencia a convergência suave da integral acumulada para o valor exato $\pi^4/15$, confirmando numericamente a identidade

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \Gamma(4)\zeta(4).$$

Esse resultado reforça que a função zeta não atua apenas como regularizadora de divergências, mas surge como elemento intrínseco à estrutura da estatística quântica bosônica, governando a dependência em temperatura da radiação de corpo negro.

Na Figura 4, observa-se o comportamento da função de Bose $g_{\frac{3}{2}}(z) = \text{Li}_{\frac{3}{2}}(z)$ à medida que a fugacidade z se aproxima da unidade. A tendência clara da curva em direção ao valor $\zeta\left(\frac{3}{2}\right)$ confirma numericamente o critério de condensação do gás de Bose ideal. Esse resultado é particularmente relevante porque evidencia que a zeta de Riemann aparece como limite crítico de uma função polilogarítmica associada ao número de estados ocupados. Diferentemente do caso do Casimir, aqui a zeta não regulariza uma divergência, mas define um limiar físico, reforçando sua dupla função no formalismo quântico.

A Figura 5 apresenta os integrandos das integrais de Fermi–Dirac para diferentes valores do parâmetro s . Observa-se que, à medida que s aumenta, o pico do integrando desloca-se para valores maiores de x e a curva torna-se mais larga, indicando maior peso de excitações de alta energia. A concordância numérica entre as integrais avaliadas e a expressão analítica

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x + 1} dx = (1-2^{1-s})\Gamma(s)\zeta(s)$$

confirma que a função zeta de Riemann também governa, de forma sistemática, correções térmicas em sistemas fermiônicos, com o fator $(1-2^{1-s})$ codificando a exclusão de Pauli. A Figura 5 destaca a universalidade da função zeta como elo entre estatística quântica e análise espectral.

A Figura 6 ilustra o comportamento do logaritmo do determinante zeta-regularizado do Laplaciano unidimensional com condições de contorno de Dirichlet. A

dependência linear em $\log(2L)$ confirma o resultado analítico $\det'(\Delta) = 2L$, mostrando que a regularização-zeta converte um produto infinito de autovalores em uma função suave do parâmetro geométrico L . Esse resultado é central em correções de um-laço e ações efetivas, evidenciando como a zeta permite preservar informações geométricas essenciais após o processo de regularização.

Na Figura 7, o comportamento do termo líder do traço do heat kernel, proporcional a $(4\pi t)^{-1/2}$, revela explicitamente a divergência ultravioleta associada ao limite $t \rightarrow 0^+$. A linearidade da curva em escala log-log confirma a previsão analítica da expansão assintótica do heat kernel e, consequentemente, a estrutura de polos da função zeta espectral associada ao operador. Esse gráfico estabelece de forma visual a ponte conceitual entre renormalização espectral, heat kernel e função zeta, que constitui o núcleo matemático de inúmeras aplicações em Mecânica Quântica e Teoria Quântica de Campos.

Por fim, a Figura 8, que apresenta as partes imaginárias dos primeiros zeros não triviais da função zeta de Riemann, sugere uma estrutura de níveis com crescimento aproximadamente regular. Embora não represente um espectro físico no sentido estrito, o padrão observado é compatível com as previsões estatísticas de sistemas quânticos caóticos e reforça as conexões propostas entre os zeros da função zeta, matrizes aleatórias e caos quântico. A Figura 8 amplia o escopo do artigo ao mostrar que a função zeta não se limita a aplicações técnicas, mas também aparece como objeto central em conjecturas profundas sobre a natureza espectral de sistemas quânticos.

Em síntese, a análise conjunta das Figuras 1 a 8 demonstra que a função zeta de Riemann atua como um princípio organizador na Mecânica Quântica: regulariza divergências, fecha integrais universais, preserva informação geométrica e conecta espectros quânticos a estruturas matemáticas profundas. Os resultados numéricos apresentados não apenas confirmam expressões analíticas conhecidas, mas também fornecem uma leitura geométrica e espectral que reforça a relevância contemporânea da função zeta como ferramenta conceitual e computacional na Física Moderna.

4 CONCLUSÃO

O presente artigo teve como objetivo central analisar, de maneira sistemática e tecnicamente fundamentada, o papel da função zeta de Riemann na Mecânica Quântica, com ênfase em processos de regularização analítica, somas espectrais e integrais quânticas, ilustrados por aplicações paradigmáticas e visualizações numéricas. Ao longo do trabalho, ficou evidenciado que a zeta de Riemann não constitui apenas um artefato matemático auxiliar, mas sim um elemento estrutural profundo, capaz de organizar, interpretar e unificar fenômenos quânticos que, à primeira vista, surgem como formalmente divergentes ou desconectados.

Do ponto de vista da Matemática, o artigo reforça a relevância da função zeta como ponte natural entre análise complexa, teoria espectral, teoria das distribuições e operadores diferenciais elípticos. As aplicações discutidas, especialmente aquelas envolvendo determinantes funcionais, zetas espectrais e heat kernel, evidenciam como técnicas originalmente desenvolvidas no contexto da teoria dos números e da análise funcional encontram realizações concretas em problemas físicos reais. Nesse sentido, o trabalho contribui para a valorização da matemática aplicada de alto nível, mostrando que conceitos abstratos, como continuação analítica, polos, resíduos e séries divergentes, adquirem significado físico preciso quando inseridos em um arcabouço espectral adequado.

Sob a perspectiva da Física, particularmente da Mecânica Quântica e da Física Matemática, os resultados discutidos confirmam a função zeta como uma ferramenta conceitual indispensável na formulação moderna de energias de vácuo, correções de um-laço, estatística quântica e métodos de quantização espectral. A análise do efeito Casimir, das integrais de Bose–Einstein e Fermi–Dirac, bem como da relação entre heat kernel e zeta espectral, evidencia que a zeta fornece uma linguagem unificadora para tratar tanto sistemas quânticos de poucos graus de liberdade quanto campos quânticos efetivos. Ademais, a discussão sobre os zeros não triviais da zeta e suas conexões com caos quântico amplia o horizonte do artigo ao inserir a temática em um cenário de pesquisa contemporâneo e ainda aberto.

No âmbito da academia, este trabalho oferece uma contribuição integradora, ao articular resultados clássicos consolidados com desenvolvimentos recentes da literatura, apresentando-os de forma coerente e acessível a pesquisadores de diferentes áreas afins. O artigo pode servir como material de referência para estudantes de pós-

graduação e pesquisadores que desejam compreender como ferramentas matemáticas sofisticadas são efetivamente empregadas em problemas quânticos concretos. Além disso, ao enfatizar o papel da regularização-zeta como método rigoroso e sistemático, o estudo contribui para a formação de uma cultura científica mais atenta aos fundamentos matemáticos subjacentes às teorias físicas.

No contexto do ensino, especialmente no ensino superior e na pós-graduação em Física e Matemática, o artigo apresenta potencial significativo como recurso didático. A combinação entre deduções analíticas e visualizações gráficas facilita a compreensão de conceitos abstratos, como regularização de divergências e interpretação espectral de operadores. Dessa forma, o trabalho pode auxiliar na transição do estudante entre uma Mecânica Quântica mais operacional e uma abordagem mais conceitual e matemática, característica da Física Moderna e da Física Matemática.

Em termos de pesquisa, o artigo reforça a função zeta de Riemann como um eixo fértil para investigações futuras. As aplicações discutidas apontam para extensões naturais, como o estudo de zetas generalizadas (Hurwitz, Epstein, Selberg), geometrias não triviais, operadores singulares, sistemas com desordem e conexões com informação quântica. Assim, o trabalho não apenas sistematiza conhecimentos existentes, mas também abre caminhos para novas investigações interdisciplinares, nas quais Matemática e Física se retroalimentam.

No que se refere à sociedade, embora o conteúdo seja eminentemente teórico, sua importância não deve ser subestimada. Muitos avanços tecnológicos contemporâneos, desde nanotecnologia até dispositivos quânticos, dependem de uma compreensão profunda de flutuações quânticas, espectros e efeitos de fronteira, como o Casimir. Ao fortalecer os fundamentos teóricos dessas áreas, estudos como este contribuem indiretamente para o desenvolvimento científico e tecnológico, além de promover uma visão mais integrada do conhecimento humano, na qual matemática abstrata e realidade física se encontram.

Por fim, é fundamental reconhecer as limitações do estudo. O artigo concentrou-se em aplicações selecionadas e representativas, não esgotando a vasta gama de contextos em que a função zeta de Riemann e suas extensões aparecem. Além disso, as visualizações numéricas apresentadas têm caráter ilustrativo e não substituem análises

rigorosas em geometrias mais complexas ou em modelos fisicamente mais realistas. Outro limite diz respeito à conexão entre zeros da zeta e espectros quânticos, que permanece, em grande medida, no nível conjectural e heurístico, carecendo de uma formulação física plenamente estabelecida.

Apesar dessas limitações, considera-se que o trabalho cumpre seu propósito fundamental: demonstrar que a função zeta de Riemann constitui um instrumento conceitual e técnico de primeira grandeza na Mecânica Quântica contemporânea. Ao integrar regularização, métodos espectrais e aplicações físicas sob um mesmo arcabouço analítico, o artigo reafirma a relevância permanente dessa função matemática não apenas para a teoria dos números, mas para a compreensão profunda da estrutura quântica da natureza.

5 REFERÊNCIAS

BOGOMOLNY, Eugene. **Quantum and arithmetical chaos**. In: CARTIER, Pierre et al. (ed.). *Frontiers in Number Theory, Physics, and Geometry I: On Random Matrices, Zeta Functions, and Dynamical Systems*. Berlin: Springer, 2006. p. 333–372.

ELIZALDE, Emilio; ODINTSOV, Sergei D.; ROMERO, Alberto; BYTSENKO, Andrei A.; ZERBINI, Sergio. **Zeta regularization techniques with applications**. Singapore: World Scientific, 1994.

FLACHI, Antonino; QUINTA, Gonçalo M. Qubit Casimir effect. **Quantum Physics Physical Review D**, College Park, v. 111, n. 6, p. L061701, 2025. DOI:

FUCCI, Guglielmo; KIRSTEN, Klaus; ZERBINI, Sergio. The functional determinant of singular Sturm-Liouville operators via spectral zeta functions. **Letters in Mathematical Physics, Cham**, v. 114, 2024.

FUCCI, Guglielmo; KIRSTEN, Klaus. Heat kernel coefficients for Laplace operators on the spherical suspension. **Communications in Mathematical Physics**, v. 314, n. 2, p. 483–507, 2012.

FUCCI, Guglielmo; PIORKOWSKI, Piotr; STANFILL, Jon. Analytic continuation of spectral zeta functions for singular operators. **Letters in Mathematical Physics, Cham**, v. 114, n. 3, 2024.

GREENBLATT, J. **Determinants of the Laplacian on polygons and lattice approximations**. **Communications in Mathematical Physics**, Berlin, v. 381, p. 1411–1460, 2021.

GREENBLATT, J. Discrete and continuous zeta-regularized determinants of Laplacians. **Analysis & PDE**, Berkeley, v. 16, n. 1, p. 1–45, 2023.



HAWKING, Stephen W. Zeta function regularization of path integrals in curved spacetime. **Communications in Mathematical Physics**, Berlin, v. 55, n. 2, p. 133–148, 1977.

HEYMANS, Christophe et al. Critical Casimir forces and spectral zeta methods. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, Bristol, v. 57, n. 6, 2024.

KIRSTEN, Klaus. **Spectral functions in mathematics and physics**. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2001.

KRISCIUNAS, Kevin. How to integrate Planck's function. **American Journal of Physics**, College Park, v. 86, n. 7, p. 531–534, 2018.

TIAN, Zixiao et al. Statistics of Riemann zeros and quantum chaotic spectra. **Physical Review E, College Park**, v. 109, n. 2, 2024.