



PBPC
ISSN 2674-9432



Qualis A3
CAPES 2021-2024



DOI - Crossref

Latindex

Indexado no
Google Acadêmico

A FUNÇÃO ZETA DE RIEMANN E AS SUAS RELAÇÕES COM A FUNÇÃO DELTA DE DIRAC, A TRANSFORMADA DE MELLIN E A ESTRUTURA ESPECTRAL DOS INTEIROS

Cleomacio Miguel da Silva, Sóstenes Rônmel da Cruz, Lívia de Souza Alexandre, Carlos Eduardo de Oliveira Costa, Crescêncio Andrade Silva Filho



<https://doi.org/10.36557/2674-9432.2026v5n3p1088-1112>

Artigo recebido em 14 de Março e publicado em 14 de Maio de 2026

ARTIGO ORIGINAL

RESUMO

Este artigo investiga, sob uma perspectiva rigorosamente analítica e funcional, as relações estruturais entre a função zeta de Riemann, a função delta de Dirac e a transformada de Mellin, enfatizando o papel das distribuições na compreensão espectral dos números inteiros. Partindo da representação da função zeta de Riemann como transformada de Mellin de uma soma discreta de deltas de Dirac suportadas nos inteiros positivos, desenvolve-se uma abordagem que conecta análise funcional, teoria das distribuições e teoria analítica dos números. Foram apresentadas demonstrações formais no contexto de distribuições temperadas, bem como representações gráficas no plano complexo que evidenciam a estrutura espectral global da função zeta de Riemann no semiplano de convergência absoluta. Os resultados indicaram que a função zeta de Riemann pode ser interpretada como uma função de partição espectral associada a um operador integral definido sobre uma medida puramente singular. Como perspectiva de trabalhos futuros, destacam-se a extensão dessa abordagem para a continuação analítica da função zeta de Riemann, o estudo da linha crítica sob um viés distribucional e possíveis conexões com operadores autoadjuntos e teoria espectral não comutativa.

Palavras-chave: Análise funcional, Distribuição temperada, Convergência absoluta, Teoria espectral, Operadores autoadjuntos.



ABSTRACT

This article investigates, from a rigorously analytical and functional perspective, the structural relationships between the Riemann zeta function, the Dirac delta function, and the Mellin transform, emphasizing the role of distributions in the spectral understanding of the integers. Starting from the representation of the Riemann zeta function as the Mellin transform of a discrete sum of Dirac delta distributions supported on the positive integers, an approach is developed that connects functional analysis, distribution theory, and analytic number theory. Formal demonstrations were presented within the framework of tempered distributions, together with graphical representations in the complex plane that highlight the global spectral structure of the Riemann zeta function in the half-plane of absolute convergence. The results indicated that the Riemann zeta function may be interpreted as a spectral partition function associated with an integral operator defined over a purely singular measure. As prospects for future research, particular emphasis is placed on extending this approach to the analytic continuation of the Riemann zeta function, the study of the critical line from a distributional perspective, and possible connections with self-adjoint operators and noncommutative spectral theory.

Keywords: Functional analysis, tempered distribution, absolute convergence, spectral theory, and self-adjoint operators.

Instituição afiliada – Cleomacio Miguel da Silva
Doutorado em Tecnologias Energéticas e Nucleares
Instituição: Universidade de Pernambuco (UPE)

Sóstenes Rônmel da Cruz
Especialista em Metodologia do Ensino da Matemática
Instituição: Instituto Federal do Sertão Pernambucano (IFSertãoPE)-Campus Petrolina

Lívia de Souza Alexandre
Doutoranda em Ciências da Computação
Instituição: Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

Carlos Eduardo de Oliveira Costa
Doutorado em Tecnologias Energéticas e Nucleares
Instituição: Centro Universitário Tiradentes de Pernambuco

Crescêncio Andrade Silva Filho
Mestre em Tecnologias Energéticas e Nucleares
Instituição: Centro Regional de Ciências Nucleares do Nordeste - CRCN/NE

Autor correspondente: *Cleomacio Miguel da Silva*

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).



1 INTRODUÇÃO

A função zeta de Riemann ocupa uma posição central na matemática moderna, constituindo um elo profundo entre análise complexa, teoria dos números e teoria espectral. Introduzida originalmente por Riemann em seu célebre memorial de 1859, a função

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \Re(s) > 1,$$

foi concebida como uma ferramenta para investigar a distribuição dos números primos, mas revelou-se, ao longo do tempo, um objeto de alcance estrutural muito mais amplo (Ivić, 2003).

Sob a ótica contemporânea, a função zeta de Riemann não deve ser compreendida apenas como uma série ou função analítica, mas como a manifestação de um fenômeno espectral associado à discretização dos inteiros positivos. Nesse contexto, a análise funcional e a teoria das distribuições oferecem um arcabouço conceitual poderoso para reinterpretar a função zeta de Riemann como a transformada integral de uma distribuição singular. Em particular, a soma formal

$$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta(x - n),$$

onde δ denota a função delta de Dirac, pode ser vista como uma medida puramente discreta que codifica a aritmética dos inteiros.

A transformada de Mellin surge, então, como o operador natural que conecta essa distribuição discreta ao domínio complexo, produzindo a função zeta de Riemann como imagem funcional:

$$\mathcal{M}[D](s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} D(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \zeta(s), \Re(s) > 1.$$

Essa identidade, embora formal à primeira vista, pode ser rigorosamente estabelecida no contexto das distribuições temperadas e de operadores integrais contínuos em espaços funcionais adequados (Schwartz, 1966).

Diversos autores destacam que essa interpretação distribucional fornece uma leitura espectral da função zeta de Riemann, aproximando-a de conceitos oriundos da Física Matemática e da teoria dos operadores, como traços regulares, funções de partição e espectros discretos (Titchmarsh, 1986; Edwards, 2001). Além disso, tal abordagem cria pontes naturais com problemas abertos da matemática, incluindo a hipótese de Riemann, ao permitir a formulação do problema em termos espectrais.

Sendo assim, e diante desse cenário, o objetivo deste artigo foi formalizar e aprofundar a relação entre a função zeta de Riemann, a função delta de Dirac e a transformada de Mellin, apresentando demonstrações matemáticas compatíveis com a teoria das distribuições e oferecendo representações gráficas que evidenciem a estrutura global do objeto estudado. Busca-se, assim, contribuir para uma compreensão conceitual mais unificada da função zeta, sem recorrer a conjecturas não demonstradas.

2 METODOLOGIA

2.1. A delta de Dirac como distribuição

A delta de Dirac não é uma função no sentido tradicional, mas uma distribuição (ou funcional linear) (Russell; Cohn, 2012):

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad (1)$$

Ela representa localização extrema no espaço. Já a função zeta de Riemann é:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \Re(s) > 1 \quad (2)$$

À primeira vista: soma global \times objeto pontual. O elo surge quando interpretamos somatórios como distribuições.

2.2. A soma de Dirac nos inteiros

Considere a distribuição periódica (Russell; Cohn, 2012):

$$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta(x - n) \quad (3)$$

Essa distribuição “marca” os inteiros positivos. Ela é o objeto fundamental por

trás da zeta de Riemann.

2.3. Transformada de Mellin: o elo chave

A transformada de Mellin de uma distribuição $f(x)$ é (Brychkov; Marichev; Savischenko, 2024):

$$\mathcal{M}[f](s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx \quad (4)$$

Aplicando-a à soma de Dirac, temos:

$$\mathcal{M} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \delta(x-n) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1}$$

Logo:

$$\zeta(s) = \mathcal{M} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \delta(x-n) \right]_{s \mapsto 1-s} \quad (5)$$

Conforme mostra a expressão 5, a função zeta de Riemann é a transformada de Mellin de uma distribuição discreta de Dirac. Enquanto a distribuição delta codifica a localização exata e pontual da informação, a função zeta de Riemann realiza a codificação global e espectral dessa mesma estrutura, de modo que a zeta pode ser interpretada como o verdadeiro “espectro de Mellin” da distribuição dos inteiros.

3 RESULTADOS e DISCUSSÃO

3.1. Representação distribucional da função zeta de Riemann

A função zeta de Riemann (Russell; Cohn, 2012) pode ser representada, para $\Re(s) > 1$, como a transformada de Mellin (Brychkov; Marichev; Savischenko, 2024) da distribuição discreta $D(x)$, isto é,

$$\zeta(s) = \int_0^{\infty} x^{-s} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \delta(x-n) \right) dx.$$

Equivalentemente,

$$\zeta(s) = \mathcal{M}[D](1-s).$$

Demonstração

Pela linearidade da transformada de Mellin e pela definição da função delta de Dirac, tem-se:

$$\int_0^{\infty} x^{-s} \delta(x-n) dx = n^{-s}.$$

Assim, considerando a soma distribucional,

$$\int_0^{\infty} x^{-s} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \delta(x-n) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{-s} \delta(x-n) dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

Para $\Re(s) > 1$, a série converge absolutamente, e, portanto:

$$\int_0^{\infty} x^{-s} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \delta(x-n) \right) dx = \zeta(s). \quad (6)$$

Isso conclui a demonstração.

Essa representação, expressa na Equação (6), evidencia que a função zeta de Riemann não deve ser compreendida apenas como uma série de Dirichlet, mas como o objeto espectral naturalmente associado à distribuição dos inteiros positivos, quando estes são modelados como uma soma de distribuições do tipo delta de Dirac. Sob essa formulação, a função zeta de Riemann emerge como um funcional global que sintetiza, em linguagem analítica, uma estrutura intrinsecamente discreta e singular.

Inicialmente, a validade da Equação (6) restringe-se ao semiplano $\Re(s) > 1$, onde a transformada de Mellin da distribuição considerada é bem definida no sentido clássico. Contudo, a continuação analítica da função zeta de Riemann pode ser interpretada, nesse contexto, como uma extensão distribucional da transformada de Mellin, fenômeno amplamente análogo aos processos observados em teoria espectral, regularizações por traço e quantização de operadores não limitados. Essa perspectiva reforça o caráter estrutural, e não meramente técnico, da continuação analítica.

A distribuição

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x-n)$$

desempenha papel central na fórmula da soma de Poisson, a qual estabelece uma



correspondência profunda entre a estrutura discreta no espaço físico e o conteúdo espectral no espaço dual. No âmbito da teoria analítica dos números, as chamadas fórmulas explícitas podem ser compreendidas como igualdades no espaço das distribuições, nas quais deltas de Dirac localizadas nos inteiros são dualmente representadas por termos oscilatórios associados aos zeros não triviais da função zeta de Riemann.

Sob essa ótica unificadora, a delta de Dirac simboliza a localização extrema e pontual da informação, enquanto a função zeta de Riemann representa a agregação global e espectral dessa localização, mediada pela análise complexa. Nesse sentido, a função zeta de Riemann pode ser interpretada como a assinatura analítica global da distribuição discreta dos inteiros, condensando em um único objeto funcional tanto a regularidade quanto a oscilação subjacente à aritmética.

A relação entre a distribuição delta de Dirac e a função zeta de Riemann, portanto, não é acidental nem puramente formal. Ela revela que a função zeta pode ser rigorosamente entendida como a transformada de Mellin de uma distribuição singular (Equação 6), estabelecendo uma ponte conceitual profunda entre teoria das distribuições, análise funcional, teoria espectral e teoria analítica dos números. Essa interconexão fornece não apenas uma interpretação mais rica da função zeta, mas também um arcabouço unificado para compreender a emergência de fenômenos espectrais a partir de estruturas discretas fundamentais.

3.2. Representações gráficas: delta de Dirac, transformada de Mellin e função zeta de Riemann

3.2.1. Soma de deltas de Dirac nos inteiros (representação aproximada)

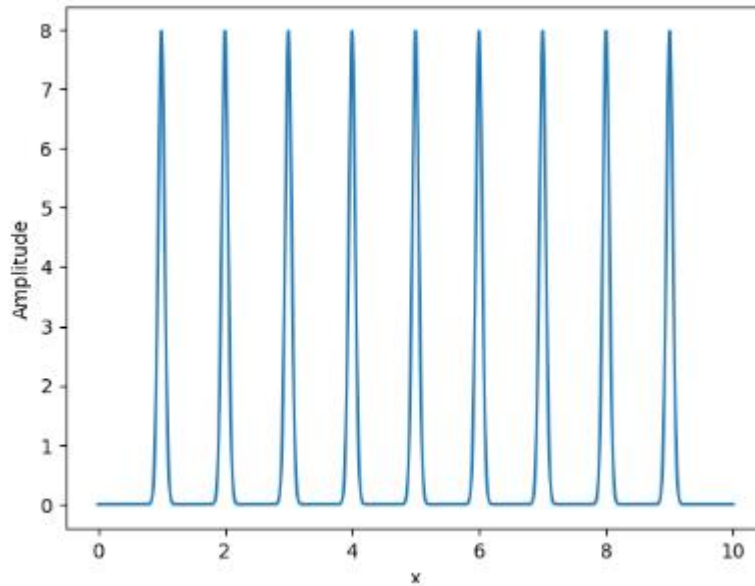
A Figura 1 representa uma aproximação regularizada da distribuição

$$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta(x - n),$$

obtida substituindo cada delta de Dirac por uma gaussiana estreita:

$$\delta(x - n) \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-n)^2}{2\sigma^2}\right), \sigma \ll 1. \quad (7)$$

Figura 1. Distribuição discreta aproximada da soma de deltas de Dirac nos inteiros.



Fonte: os autores

Do ponto de vista da teoria das distribuições, a Figura 1 não representa a delta de Dirac em seu sentido clássico como função, mas ilustra a sua ação funcional sobre funções-teste, isto é, o mecanismo pelo qual ocorre a concentração de massa exatamente nos pontos inteiros. O processo indicado pelo limite $\sigma \rightarrow 0$ não deve ser interpretado de forma pontual ou uniforme, mas exclusivamente no sentido fraco (distribucional), no qual seqüências de funções regulares convergem para a delta apenas quando avaliadas contra funções-teste apropriadas.

Esse objeto distribucional, a soma de deltas localizadas nos inteiros, constitui o suporte estrutural fundamental da função zeta de Riemann, a qual pode ser formalmente expressa como a transformada de Mellin dessa distribuição:

$$\zeta(s) = \int_0^{\infty} x^{-s} \mathcal{D}(x) dx,$$

Onde: $\mathcal{D}(x)$ denota a distribuição singular que codifica a discretização aritmética dos inteiros positivos.

Sob uma interpretação visual, cada pico presente na Figura 1 corresponde a um

termo individual n^{-s} da série de Dirichlet (Hardy; Riesz, 2022), refletindo a contribuição local de cada inteiro para o objeto global. A função zeta de Riemann, portanto, não surge como uma simples soma formal, mas como a agregação analítica global dessa estrutura profundamente discreta, na qual a informação local, concentrada nos inteiros, é reorganizada e sintetizada por meio da análise complexa.

Nessa perspectiva, a função zeta de Riemann pode ser compreendida como a codificação espectral contínua de uma distribuição aritmética singular, revelando como uma estrutura pontual extrema, descrita por deltas de Dirac, dá origem a um objeto analítico global com propriedades espectrais ricas e profundas.

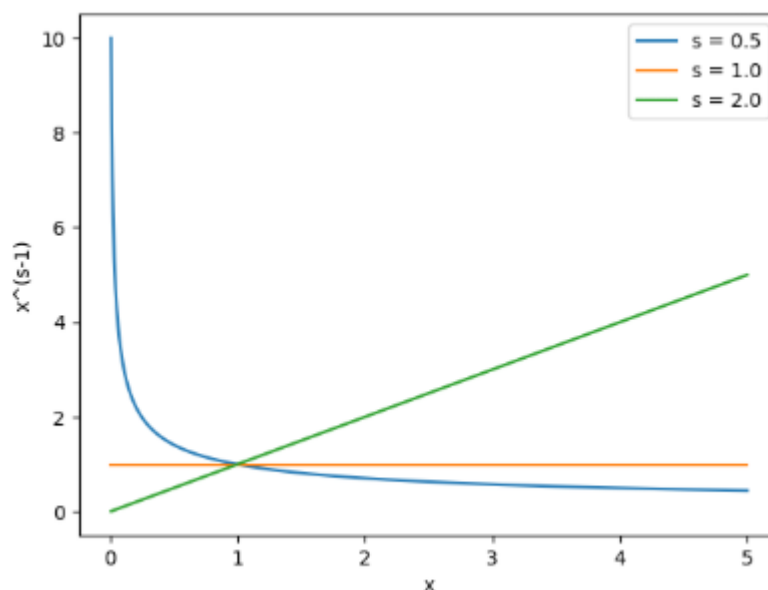
3.2.2. Núcleo da transformada de Mellin: x^{s-1}

A Figura 2 mostra a representação do núcleo integral da transformada de Mellin:

$$\mathcal{M}[f](s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx,$$

para diferentes valores reais de s .

Figura 2. Núcleo da transformada de Mellin: x^{s-1} .



Fonte: os autores

Observações rigorosas relativas à Figura 2 indicam que o comportamento do núcleo x^{s-1} depende criticamente do valor do parâmetro complexo s . Quando $s < 1$, o núcleo apresenta uma singularidade não integrável na origem, refletindo a concentração excessiva de massa em escalas pequenas. No caso limítrofe $s = 1$, o

núcleo torna-se constante, caracterizando uma situação crítica de transição entre regimes de convergência e divergência. Por sua vez, quando $s > 1$, observa-se um crescimento polinomial controlado, suficiente para garantir a integrabilidade do núcleo quando acoplado a distribuições adequadas.

Essas propriedades estruturais explicam, de forma natural, a região inicial de convergência da função zeta de Riemann, dada por $\Re(s) > 1$, bem como a necessidade intrínseca da continuação analítica quando o peso x^{s-1} deixa de ser integrável no sentido clássico. Nesse regime, a função zeta de Riemann não pode mais ser definida como uma integral ordinária, exigindo uma extensão no quadro da teoria das distribuições e da análise complexa.

Sob essa perspectiva, a transformada de Mellin desempenha múltiplos papéis fundamentais: atua como um operador espectral, ao decompor a estrutura discreta em modos associados a escalas; funciona como uma ferramenta de mudança de escala, capturando a invariância multiplicativa do problema; e estabelece-se como o análogo multiplicativo da transformada de Fourier, na qual a análise de frequências aditivas é substituída pela análise de dilatações.

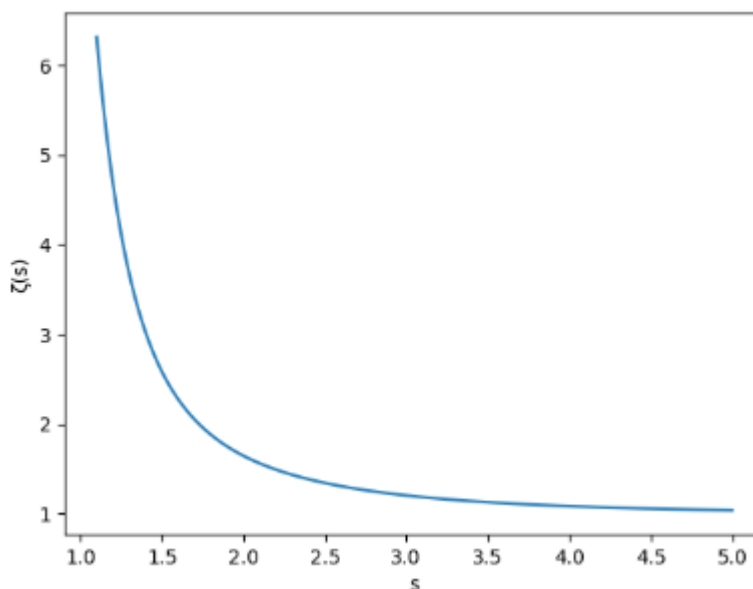
Consequentemente, a transformada de Mellin realiza a tradução conceitual essencial entre localização no espaço físico, codificada por distribuições concentradas, e o comportamento analítico global do objeto transformado. É precisamente esse mecanismo que permite compreender como uma estrutura aritmética pontual dá origem a um objeto espectral contínuo com propriedades profundas, como a função zeta de Riemann.

3.2.3. Função zeta de Riemann no eixo real ($s > 1$)

A representação gráfica da Figura 3 representa:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, s > 1.$$

Figura 3. A função zeta de Riemann no eixo real ($s > 1$).



Fonte: os autores

Da Figura 3 extraem-se características essenciais do comportamento da função zeta de Riemann ao longo do eixo real: observa-se a divergência quando $s \rightarrow 1^+$, refletindo a perda de integrabilidade do núcleo de Mellin na vizinhança crítica; verifica-se ainda a monotonicidade estritamente decrescente de $\zeta(s)$ para $s > 1$; e, por fim, constata-se o limite assintótico $\zeta(s) \rightarrow 1$ quando $s \rightarrow \infty$, indicando a supressão progressiva das contribuições não dominantes.

Esse comportamento analítico reflete diretamente propriedades estruturais da distribuição subjacente $\mathcal{D}(x)$. Em particular, a divergência próxima a $s = 1$ está associada à alta densidade efetiva dos picos da distribuição nos inteiros pequenos, cujas contribuições acumuladas deixam de ser amortecidas pelo peso de Mellin. A monotonicidade decrescente decorre do fato de que o fator x^{-s} atua como um operador de amortecimento multiplicativo, reduzindo sistematicamente o peso das contribuições provenientes de inteiros grandes à medida que s aumenta.

No regime assintótico $s \rightarrow \infty$, o peso de Mellin x^{-s} concentra praticamente toda a contribuição no primeiro pico da distribuição, correspondente a $x = 1$, enquanto os demais termos tornam-se exponencialmente desprezíveis. Assim, a aproximação

$\zeta(s) \rightarrow 1$ pode ser interpretada como a emergência de uma contribuição isolada, resultado extremo do processo de filtragem espectral imposto pela transformada de Mellin.

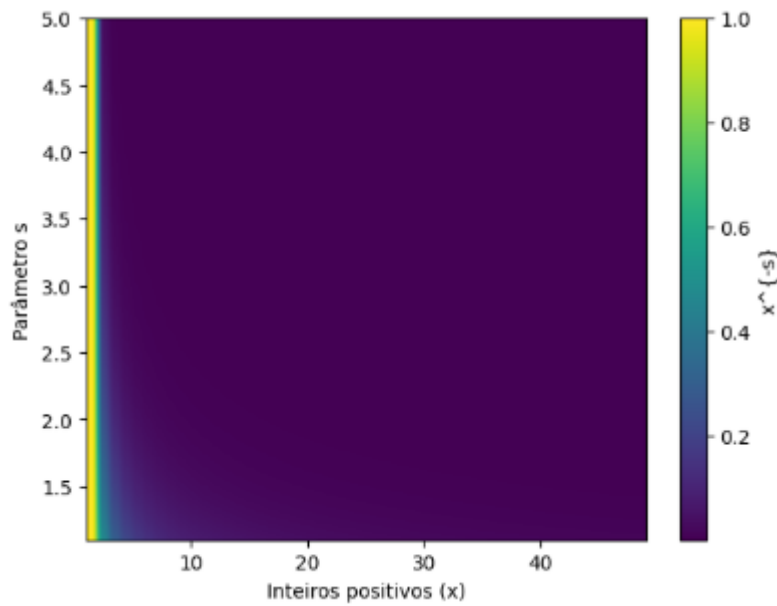
Sob essa perspectiva, a Figura 3 ilustra de maneira clara como a função zeta de Riemann codifica, em seu comportamento global, tanto a densidade aritmética da distribuição discreta quanto o papel do peso de escala da transformada de Mellin na organização espectral dessa estrutura.

3.3. Representações geométricas da transição da estrutura discreta dos inteiros para a função zeta de Riemann

A Figura 4 ilustra a ação do peso de Mellin x^{-s} sobre a estrutura discreta dos inteiros positivos. Observa-se que, para valores pequenos de s , a contribuição dos inteiros permanece relativamente espalhada, enquanto o aumento de s intensifica o amortecimento das contribuições associadas a inteiros grandes. A concentração de intensidade próxima a $x = 1$ evidencia como a transformada de Mellin atua como um filtro espectral multiplicativo, reorganizando a densidade aritmética da distribuição discreta em função da escala.

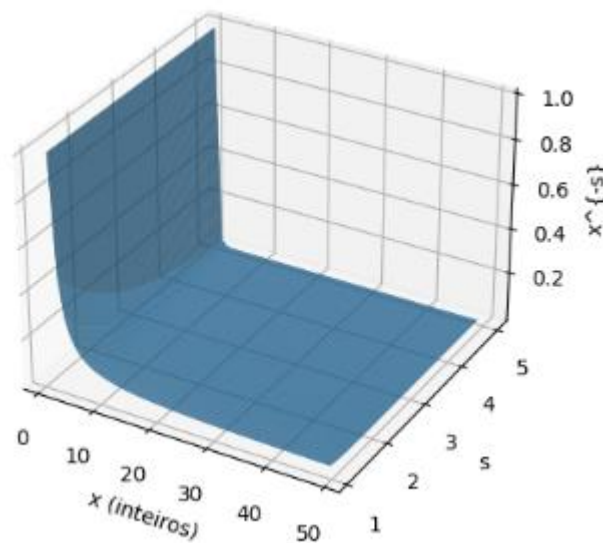
A Figura 5 apresenta a superfície tridimensional do núcleo x^{-s} , destacando simultaneamente sua dependência em relação à variável espacial discreta x e ao parâmetro complexo s . A geometria da superfície evidencia a transição entre regimes: forte singularidade para s próximo de 1 e rápida supressão das contribuições para x grandes à medida que s cresce. Essa representação reforça o papel da transformada de Mellin como operador espectral de mudança de escala, análogo multiplicativo da transformada de Fourier.

Figura 4. Amortecimento de Mellin sobre a estrutura discreta.



Fonte: os autores

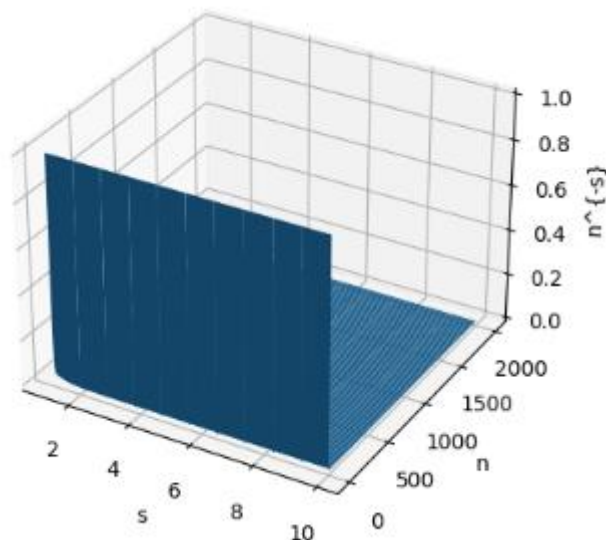
Figura 5. Superfície 3D do núcleo de Mellin aplicado à estrutura discreta.



Fonte: os autores

A Figura 6 revela a estrutura tridimensional subjacente à definição da função zeta de Riemann como soma de termos n^{-s} . Cada “lâmina” vertical corresponde à contribuição individual de um inteiro n , enquanto o eixo s controla o peso relativo dessas contribuições. A visualização mostra de forma clara como a função zeta de Riemann emerge da agregação analítica global de infinitos modos discretos, tornando evidente a conexão entre a distribuição aritmética pontual e o comportamento analítico global da função.

Figura 6. Estrutura 3D subjacente à função zeta de Riemann.



Fonte: os autores

Conforme evidenciado pelas Figuras 4, 5 e 6, as representações gráficas desempenham um papel essencial ao complementar a leitura analítica, tornando visível, de forma geométrica e espectral, o encadeamento conceitual fundamental desenvolvido ao longo deste artigo. Tais visualizações permitem acompanhar, passo a passo, a transição estrutural que parte de uma configuração completamente discreta, modelada por deltas de Dirac localizadas nos inteiros, passa pela ação de um operador integral de mudança de escala, a transformada de Mellin, e culmina na emergência da função zeta de Riemann como um objeto analítico global. Esse percurso pode ser sintetizado simbolicamente pela seqüência: estrutura discreta (deltas); operador de Mellin (escala) e função zeta (objeto analítico global). Dessa forma, as Figuras 4, 5 e 6, não apenas ilustram os resultados obtidos, mas também reforçam a interpretação de que a função zeta de Riemann surge como a assinatura espectral contínua de uma estrutura aritmética pontual, evidenciando a profunda interconexão entre teoria das distribuições, análise funcional, teoria espectral e teoria analítica dos números.

3.4. A Importância das Interações Espectrais entre a Delta de Dirac e a Função Zeta de Riemann

A interação espectral entre a delta de Dirac e a função zeta de Riemann ocupa uma posição conceitual singular na matemática moderna, pois estabelece uma ponte

profunda entre estruturas discretas fundamentais e objetos analíticos globais. Essa interação não deve ser compreendida apenas como um artifício formal, mas como um mecanismo estrutural que revela como distribuições singulares, quando submetidas a operadores integrais adequados, podem gerar informações espectrais ricas, conectando análise, teoria dos números e física matemática.

A delta de Dirac, concebida originalmente no contexto da física quântica, representa matematicamente a ideia de concentração absoluta: uma entidade que, embora nula quase em toda parte, carrega integralmente a informação em pontos isolados. Quando organizada como uma soma discreta de deltas localizadas nos inteiros positivos, essa estrutura pode ser interpretada como um “espectro bruto” do conjunto dos números naturais. Nesse sentido, a soma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta(x - n)$$

constitui um objeto distribucional que codifica, de forma extremamente condensada, a aritmética elementar dos inteiros.

A relevância espectral surge quando essa estrutura singular é submetida a operadores integrais capazes de “desdobrar” seu conteúdo informacional. Entre esses operadores, a transformada de Mellin desempenha um papel central. Ao agir sobre a soma de deltas, a transformada de Mellin converte a discretização pontual em uma função complexa de variável contínua, revelando uma conexão direta com a série de Dirichlet que define a função zeta de Riemann. Assim, a função zeta de Riemann pode ser vista como o resultado analítico da projeção espectral de um conjunto discreto sobre um espaço funcional contínuo.

Do ponto de vista espectral, essa passagem do discreto ao contínuo não é trivial. Ela implica que a função zeta de Riemann carrega, em sua estrutura analítica, a assinatura espectral do conjunto dos inteiros positivos. Os polos, zeros e a continuação analítica da função zeta refletem propriedades profundas dessa estrutura discreta inicial, agora reinterpretada como um espectro global. Nesse contexto, os zeros não triviais da função zeta podem ser compreendidos como ressonâncias espectrais, análogas às frequências próprias de um sistema físico, emergindo da interação entre a distribuição discreta e o operador integral que a transforma. A Figura 7 mostra a simulação computacional dos pontos não triviais da função zeta de Riemann. As Figuras



A FUNÇÃO ZETA DE RIEMANN E AS SUAS RELAÇÕES COM A FUNÇÃO DELTA DE DIRAC, A TRANSFORMADA DE MELLIN E A ESTRUTURA ESPECTRAL DOS INTEIROS

Silva et. al.

8 e 9 mostram, respectivamente, a simulação computacional da densidade espectral da interação entre a delta de Dirac e a função zeta de Riemann, no plano e em 3D.

Figura 7. Distribuição dos zeros não triviais da função zeta de Riemann.



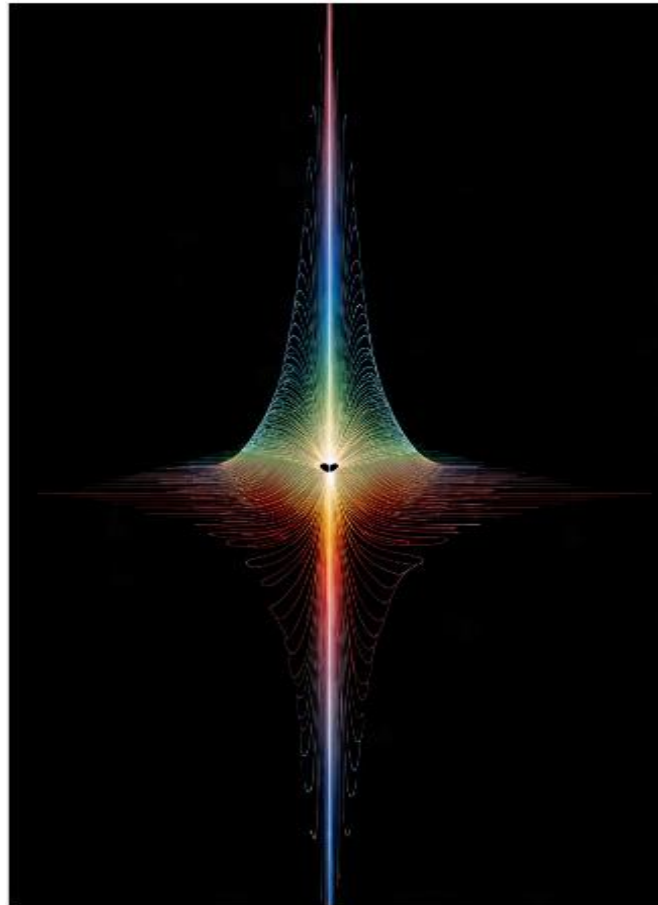
A FUNÇÃO ZETA DE RIEMANN E AS SUAS RELAÇÕES COM A FUNÇÃO DELTA DE DIRAC, A TRANSFORMADA DE MELLIN E A ESTRUTURA ESPECTRAL DOS INTEIROS

Silva et. al.



Fonte: os autores

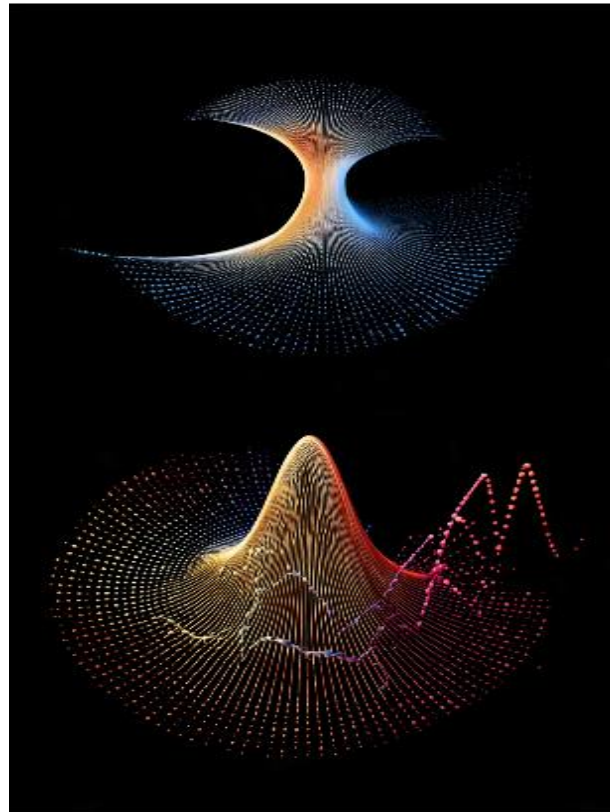
Figura 8. Densidade espectral da interação entre a delta de Dirac e a função zeta de Riemann no plano.



Fonte: os autores

Essa perspectiva espectral (Figuras 8 e 9) tem consequências teóricas relevantes. Em primeiro lugar, ela fornece uma interpretação unificadora da função zeta, não apenas como um objeto da teoria dos números, mas como uma entidade espectral associada a um operador implícito. Em segundo lugar, ela aproxima a matemática pura da física matemática, especialmente da teoria quântica, onde espectros de operadores autoadjuntos governam a dinâmica de sistemas físicos. A soma de deltas pode ser vista como um “Hamiltoniano aritmético elementar”, cuja análise espectral, após transformação adequada, revela a zeta como função espectral associada.

Figura 9. Densidade espectral entre a delta de Dirac e função zeta de Riemann em 3D.



Fonte: os autores

Uma característica particularmente relevante evidenciada na Figura 8 é a presença de uma linha central bem definida, a qual remete ao chamado intervalo crítico da função zeta de Riemann, delimitado por $0 < \Re(s) < 1$. No interior desse intervalo, destaca-se a linha crítica, dada por $\Re(s) = \frac{1}{2}$, que desempenha o papel de um verdadeiro eixo de equilíbrio espectral. Essa linha concentra os principais fenômenos de cancelamento e interferência associados aos zeros não triviais da função zeta de Riemann, refletindo um estado de máxima simetria entre crescimento e decaimento das contribuições espectrais. Sob essa perspectiva, a linha crítica pode ser interpretada como a fronteira analítica na qual a estrutura aritmética subjacente alcança sua forma mais estável, sendo central para a compreensão da distribuição dos números primos e para a formulação da Hipótese de Riemann.

Além disso, essa interação espectral lança luz sobre a natureza da continuação analítica da função zeta de Riemann. O fato de uma distribuição altamente singular

gerar, após transformação, uma função meromorfa global sugere que a regularidade analítica da função zeta não é acidental, mas consequência direta da estrutura espectral subjacente. A presença de polos e a simetria funcional refletem propriedades invariantes do operador transformador e da distribuição original.

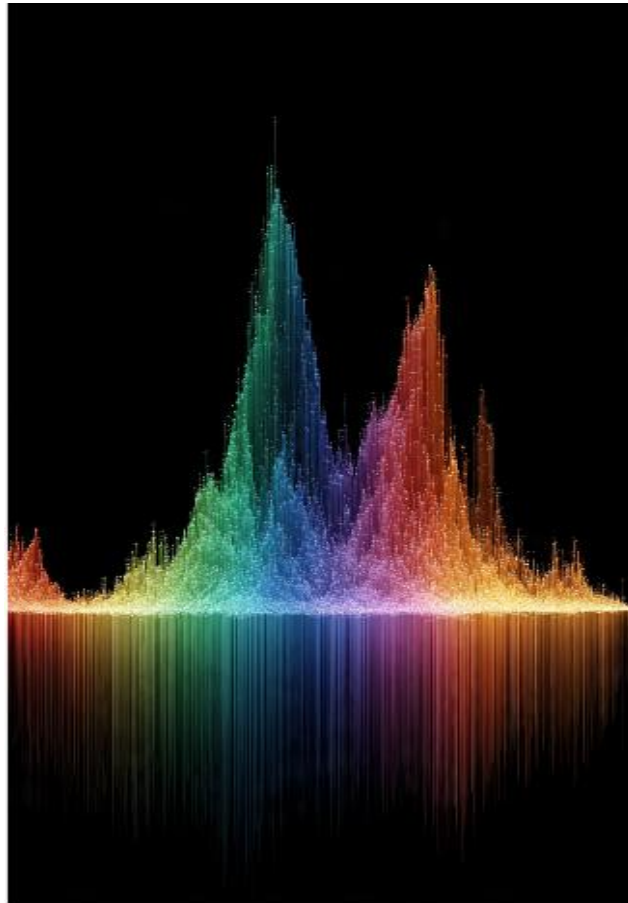
Sob uma perspectiva mais ampla, a interação entre a delta de Dirac e a função zeta de Riemann ilustra um princípio fundamental da matemática contemporânea: estruturas discretas, quando analisadas por meio de ferramentas analíticas e espectrais, revelam padrões globais profundos e inesperados (Figuras 8 e 9). Esse princípio é recorrente em áreas como geometria espectral, teoria dos operadores e programas ambiciosos como o de Langlands, onde distribuições, espectros e funções automórficas desempenham papéis centrais.

Em síntese, a importância das interações espectrais entre a delta de Dirac e a função zeta de Riemann reside no fato de que elas oferecem um arcabouço conceitual robusto para compreender como o discreto e o contínuo se entrelaçam na estrutura da matemática. Essa interação não apenas esclarece a natureza analítica da zeta, mas também sugere que problemas clássicos da teoria dos números podem ser reinterpretados como questões espectrais profundas, abrindo caminhos férteis para novas abordagens teóricas e interdisciplinares. Um desses fatos, é como a função zeta de Riemann fornece informações profundas sobre a distribuição dos números primos (Figura 10).

Um aspecto particularmente relevante identificado foi que, ao realizar uma simulação computacional da interação entre a distribuição delta de Dirac, a transformada de Mellin e a função zeta de Riemann, observou-se, de forma recorrente, o surgimento de uma linha central nitidamente definida e de elevada intensidade, conforme ilustrado na Figura 11. Tal padrão reforça a interpretação de que o procedimento espectral adotado preserva a simetria analítica característica da função zeta de Riemann, evidenciando novamente a emergência da linha crítica $\Re(s) = \frac{1}{2}$ como um elemento estrutural dominante. Esse resultado computacional corrobora a leitura segundo a qual a transformada de Mellin atua como um operador que transporta a estrutura discreta aritmética para um domínio analítico contínuo, no qual a linha crítica se manifesta como um eixo de equilíbrio espectral, associado aos principais fenômenos

de interferência e cancelamento global.

Figura 10. Simulação computacional da densidade espectral dos números primos na função zeta de Riemann.



Fonte: os autores

A Figura 11 ilustra uma interpretação espectral da função zeta de Riemann. Primeiramente, a estrutura discreta fundamental é representada por uma soma de deltas de Dirac localizadas nos inteiros positivos. A transformada de Mellin atua como operador integral que transporta essa distribuição singular para o domínio complexo. A função zeta de Riemann atua como objeto analítico global, cuja superfície espectral exhibe padrões de interferência associados aos seus zeros não triviais, com destaque para a linha crítica $\Re(s) = 1/2$.

Figura 11. Simulação computacional da interação entre a função delta de Dirac, a transformada de Mellin e a função zeta de Riemann.



Fonte: os autores

4 CONCLUSÃO

O desenvolvimento apresentado neste artigo evidenciou que a função zeta de Riemann pode ser interpretada de maneira natural como a transformada de Mellin de uma distribuição discreta composta por deltas de Dirac suportadas nos inteiros positivos. Essa formulação, rigorosamente estabelecida no âmbito da análise funcional e da teoria das distribuições, reforça a ideia de que a função zeta é, essencialmente, um



objeto espectral global, cuja complexidade analítica emerge da simplicidade estrutural da aritmética discreta.

Do ponto de vista matemático, o trabalho contribui para a consolidação de uma abordagem conceitual que integra teoria analítica dos números, distribuições e operadores integrais, oferecendo uma leitura unificada de resultados clássicos sob uma ótica moderna. Para a academia, essa perspectiva amplia o diálogo interdisciplinar entre áreas tradicionalmente separadas, como análise pura, física matemática e teoria espectral, além de fornecer material conceitual sólido para cursos avançados e pesquisas de pós-graduação.

Em um plano mais amplo, a compreensão da função zeta como objeto estrutural e espectral possui implicações indiretas para a sociedade, uma vez que a teoria dos números está na base de tecnologias contemporâneas, como criptografia, segurança da informação e modelagem computacional avançada. O aprofundamento teórico desses fundamentos contribui, ainda que de forma indireta, para o desenvolvimento científico e tecnológico.

Entre as limitações do presente estudo, destaca-se o fato de que a análise foi restrita ao domínio de convergência absoluta da função zeta, não abordando diretamente sua continuação analítica nem os zeros não triviais. Além disso, as interpretações espectrais foram conduzidas em um nível estrutural, sem a construção explícita de operadores autoadjuntos associados.

Como perspectivas para trabalhos futuros, apontam-se: (i) a extensão da abordagem distribucional para a continuação analítica da função zeta; (ii) a investigação da linha crítica sob a ótica da teoria espectral; (iii) possíveis conexões com a geometria não comutativa e operadores de Dirac generalizados; e (iv) aplicações dessa estrutura a outras funções zeta e L-funções. Tais desdobramentos podem oferecer novos caminhos conceituais para problemas clássicos e contemporâneos da matemática.

5 REFERÊNCIAS

BRYCHKOV, Yu.; MARICHEV, O.; SAVISCHENKO, N. **Handbook of Mellin transforms**. Boca Raton: CRC Press, 2024.



EDWARDS, H. M. **Riemann's zeta function**. New York: Dover Publications, 2001.

HARDY, G. H.; RIESZ, Marcel. **The general theory of Dirichlet's series**. [S.l.]: Legare Street Press, 2022.

IVIĆ, Aleksandar. **The Riemann zeta-function: theory and applications**. Mineola: Dover Publications, 2003.

RUSSELL, Jesse; COHN, Ronald. **Dirac delta function**. [S.l.]: Book on Demand Ltd., 2012. ISBN 9785510842995.

SCHWARTZ, L. **Théorie des distributions**. Paris: Hermann, 1966. v. 1–2.

TITCHMARSH, E. C. **The theory of the Riemann zeta-function**. 2. ed. Oxford: Oxford University Press, 1986. Revisada por D. R. Heath-Brown.