



**PBPC**  
ISSN 2674-9432



**Qualis A3**  
CAPES 2021-2024



DOI - Crossref

Latindex

Indexado no  
**Google** Acadêmico

## ***Avaliação de Bens: Um Comparativo entre a Inferência Clássica e a Bayesiana***

*Ianyqui Falcão Costa*



<https://doi.org/10.36557/2674-9432.2026v5n3p2720-2745>

Artigo recebido em 28 de Março e publicado em 28 de Maio de 2026

### **ARTIGO ORIGINAL**

#### **RESUMO**

A quinta revolução industrial, marcada pela integração do potencial humano com as capacidades analíticas de máquinas modernas, tem transformado a engenharia de avaliações. Tecnologias como inteligência artificial, aprendizado de máquina e simulações de Monte Carlo possibilitam análises mais precisas e ágeis em cenários complexos. Nesse contexto, a estatística bayesiana se destaca por tratar variáveis como aleatórias e incorporar distribuições a priori, oferecendo flexibilidade e maior robustez na modelagem de problemas. Este estudo avalia o valor de mercado de um imóvel por meio de duas abordagens inferenciais: a clássica e a bayesiana. O valor de mercado, definido como a quantia mais provável de uma transação em condições normais de oferta e demanda, foi estimado a partir de métodos de regressão linear por mínimos quadrados e simulações baseadas em Cadeias de Markov (MCMC). A análise comparativa mostrou que, enquanto a inferência clássica se limita a estimativas pontuais, a abordagem bayesiana apresenta uma representação probabilística mais rica, permitindo intervalos de credibilidade que capturam a variabilidade dos preços. Os resultados indicam que a inferência bayesiana fornece maior confiabilidade, especialmente em cenários com alta incerteza. Por meio de simulações robustas, como o algoritmo Hamiltoniano de Monte Carlo (HMC), a abordagem bayesiana oferece insights mais detalhados para a tomada de decisão. Conclui-se que essa metodologia é uma ferramenta essencial para avançar na avaliação de bens, sendo recomendável sua ampliação para incluir variáveis qualitativas e distribuições alternativas em estudos futuros.

**Palavras-chave:** Análise de risco, Simulação de Monte Carlo, Método comparativo



## **ABSTRACT**

The fifth industrial revolution, marked by the integration of human potential with the analytical capabilities of modern machines, has transformed the field of property valuation. Technologies such as artificial intelligence, machine learning, and Monte Carlo simulations enable more precise and agile analyses in complex scenarios. In this context, Bayesian statistics stand out by treating variables as random and incorporating prior distributions, offering flexibility and greater robustness in problem modeling. This study evaluates the market value of a property using two inferential approaches: classical and Bayesian. The market value, defined as the most probable transaction amount under normal supply and demand conditions, was estimated through linear regression using the least squares method and simulations based on Markov Chains (MCMC). The comparative analysis revealed that while classical inference is limited to point estimates, the Bayesian approach provides a richer probabilistic representation, allowing credibility intervals that capture price variability. The results indicate that Bayesian inference offers greater reliability, particularly in highly uncertain scenarios. Through robust simulations, such as the Hamiltonian Monte Carlo (HMC) algorithm, the Bayesian approach provides more detailed insights for decision-making. It is concluded that this methodology is an essential tool for advancing property valuation, and its application should be expanded to include qualitative variables and alternative distributions in future studies

**Keywords:** Risk analysis, Monte Carlo simulation, Comparative method

**Instituição afiliada** – Universidade Federal de Pernambuco.

**Autor correspondente:** *Ianyqui Falcão Costa*

## 1. INTRODUÇÃO

A introdução da quinta revolução industrial, caracterizada pela combinação do potencial criativo humano com as capacidades analíticas das máquinas modernas, está transformando significativamente diversas áreas do conhecimento, incluindo a engenharia. Esse avanço é impulsionado por tecnologias como inteligência artificial (IA), aprendizado de máquina, computação em nuvem, internet das coisas (IoT) e ferramentas de análise preditiva, que estão reformulando os paradigmas tradicionais de tomada de decisões. A sinergia entre engenheiros, arquitetos e máquinas inteligentes abre caminho para decisões mais ágeis e precisas, apoiadas em modelos computacionais robustos e na utilização de dados em larga escala.

Nesse cenário, a inteligência artificial emerge como um conceito abrangente, englobando aplicações que resolvem problemas complexos de forma autônoma, muitas vezes integrando subáreas como aprendizado de máquina e aprendizado profundo. Uma de suas bases fundamentais é a estatística bayesiana, que, ao tratar todas as variáveis como aleatórias, possibilita uma modelagem mais flexível e eficaz, especialmente para problemas de alta complexidade e incerteza.

Este trabalho tem como objetivo central analisar a modelagem e a estimativa do valor de mercado de um bem imóvel por meio da comparação entre dois paradigmas inferenciais: a inferência clássica e a bayesiana. A definição do valor de mercado é compreendida como a quantia mais provável pela qual um bem seria transacionado no mercado, considerando-se as condições atuais de oferta e demanda.

A inferência bayesiana, com seu caráter estocástico e capacidade de incorporar distribuições a priori, é apresentada como uma abordagem promissora, permitindo a geração de um grande volume de amostras que refletem a variabilidade dos preços de mercado. Em contrapartida, a inferência clássica é frequentemente limitada a estimativas pontuais, não fornecendo informações detalhadas sobre a confiabilidade ou a probabilidade associada a esses resultados.

O artigo se propõe, portanto, a avaliar criticamente os dois métodos inferenciais, explorando seus pressupostos, vantagens e limitações, com base em um estudo de caso aplicado à avaliação imobiliária. Espera-se que a abordagem bayesiana, fundamentada em simulações de Monte Carlo e na dinâmica das Cadeias de Markov, forneça resultados mais abrangentes e confiáveis, contribuindo para avanços significativos na área de avaliação de bens.

## 2. METODOLOGIA

Problemas de identificação de modelos são, em termos gerais, definidos como problemas inversos. Eles visam inferir algum desconhecido parâmetro  $\theta$  de um certo modelo  $\mathcal{M}$  informado algumas medições de  $y$  relacionadas com as respostas do modelo  $g(\theta)$ , dependente dos parâmetros do modelo. Sob a hipótese da adição de um ruído de observação  $\varepsilon$ , com parâmetros de ruído  $\phi$ , resulta em:

$$y = \underbrace{g(\theta)}_{\text{modelo } \mathcal{M}} + \underbrace{e(\Phi)}_{\text{ruído}}$$

Em geral, o termo de ruído é considerado gaussiano,  $e = N(0, \phi^{-1}I)$ , com o grau de ruído desconhecido,  $\Phi$ , a ser inferido.

Em métodos determinísticos para identificação de parâmetros, a solução é obtida minimizando a diferença entre os dados de medição  $y$  e as respostas do modelo  $g(\theta)$ :

$$k(\theta) = y - g(\theta)$$

Que podem ser solucionados através de mínimos quadrados, mínimos quadrados ponderados, etc.

Essas abordagens usam métodos de otimização para retornar a melhor estimativa para os parâmetros de interesse. Note que, as soluções são estimativas pontuais dos parâmetros, ou seja, os resultados não trazem nenhuma informação sobre quanto confiável ou prováveis são.

Métodos de inferência probabilística, de outra forma, fornecem uma descrição probabilística das informações e crenças anteriores, permitindo incertezas. Isso é feito através da Regra de *Bayes* considerando todos os parâmetros desconhecidos como  $\Theta = [\theta, \phi]$

$$\underbrace{P(\Theta|y, \mathcal{M})}_{\text{Posterior}} = \frac{\overbrace{P(y|\Theta, \mathcal{M})}^{\text{verossimilhança}} \overbrace{P(\Theta|\mathcal{M})}^{\text{priori}}}{\underbrace{\int P(y|\Theta, \mathcal{M})P(\Theta|\mathcal{M})d\Theta}_{\text{termo de evidencia } P(y|\mathcal{M})}}$$

Onde a função de densidade de probabilidade a priori reflete o conhecimento prévio dos parâmetros  $\Theta$ , a função de verossimilhança define a probabilidade das medições de  $y$  informado os parâmetros  $\Theta$ . O termo de normalização  $P(y|\mathcal{M})$  descreve a evidência dos dados de  $y$  considerando o modelo  $\mathcal{M}$ .

Note que, os parâmetros desconhecidos  $\Theta$ , incorpora tanto os parâmetros do modelo  $\theta$  assim como os do erro  $\phi$ . A posteriori é uma função de densidade de probabilidade que reflete o conhecimento atualizado sobre os parâmetros após a observação dos dados. Sua solução, no entanto, é extremamente complicada e custosa computacionalmente, principalmente quando  $\dim(\Theta) \gg 1$ .

Existem duas principais categorias para aproximações em métodos de inferência bayesiana: Métodos baseados em amostragem (por exemplo: *Markov Chain Monte Carlo*) e métodos baseados em otimização (por exemplo: Inferência Variacional).

Em métodos baseados em amostragem, os algoritmos mais conhecidos são: *Metropolis-Hastings*, *Gibbs* e *Monte Carlo Hamiltoniano*. Métodos que utilizam *Markov Chain Monte Carlo (MCMC)* são ferramentas poderosas na solução de uma inferência bayesiana, eles fornecem informações assintoticamente não enviesadas. Uma outra vantagem é a natureza não paramétrica do método, na qual, não necessita da previa definição da forma do funcional da densidade a posteriori. Entretanto, existem algumas limitações com *MCMC*, geralmente exigem um alto custo computacional na amostragem.

Métodos baseados em otimização, como a inferência variacional, de outra forma, são, geralmente, mais eficientes computacionalmente que os métodos baseados em amostragem, sendo mais apropriados para problemas de alta dimensão com modelos fisicamente bem-postos. É fornecida uma aproximação para funções de densidade de probabilidade que são extremamente complicadas de serem resolvidas (integrais intratáveis) através de otimização computacional. Em suas limitações, pode-se destacar que assim como a *MCMC*, a inferência variacional pode fornecer resultados enviesados e sua acurácia depende fortemente do termo de evidência para avaliar a qualidade dos modelos.

Com o objetivo de comparar o tratamento inferencial entre a estatística clássica e a bayesiana, foi escolhido o tradicional método dos mínimos quadrados e o *MCMC* por *Monte Carlo Hamiltoniano*, respectivamente.

## **2.1. Procedimento Bayesiano**

Como apresentado no item 2, a essência da abordagem bayesiana é tratar o parâmetro desconhecido  $\theta$  como uma variável aleatória, especificar uma distribuição a priori para  $\theta$  que represente as convicções sobre  $\theta$  antes de ver os dados, usar a Regra de *Bayes* para atualizar as convicções a priori na forma de probabilidades a posteriori e fazer inferências apropriadas. Portanto há quatro passos característicos da abordagem bayesiana:

1. Especificação da Verossimilhança do modelo  $L(\theta|y) \equiv f(y|\theta)$ ;
2. Determinação da densidade a priori  $f(\theta)$ ;
3. Cálculo da densidade a posteriori  $f(\theta|y)$ , através da Regra de *Bayes*;
4. Realizar inferências através da densidade a posteriori.

Portanto, a seguir explorar-se-á cada tópico.

### **2.1.1. Especificação da Verossimilhança**

A escolha do modelo de Verossimilhança depende do que se assume por ser razoável sobre o mecanismo gerador de dados do problema em análise. Em geral, o conhecimento da estrutura pela qual os dados foram gerados pode sugerir um modelo apropriado, no entanto, o modelo será definido hipoteticamente para quê, em seguida, seja possível avaliar sua adequação no contexto dos dados.

Com o objetivo de reproduzir as condições da regressão linear por MMQ, foi adotado uma verossimilhança gaussiana, uma vez que, é amplamente aceita como uma densidade representativa no contexto de avaliações de bens imóveis com o uso da inferência clássica.

### **2.1.2. Definição das densidades a Priori**

Uma vez que no cálculo da densidade a posteriori é necessário a especificação de densidades a priori, torna-se fundamental na inferência *Bayesiana*. Portanto, sua escolha não deve ser leviana, necessitando de um cuidado considerável. A seguir será discutida alguns tipos de densidades a priori.

### 2.1.2.1. *Prioris* Conjugadas

A principal dificuldade da estimativa da densidade a posteriori pela Regra de *Bayes* se situa no cálculo da constante normalizadora,

$$f(y) = \int f(y|\theta)f(\theta)d\theta,$$

O que na grande maioria dos casos não pode ser calculada analiticamente, restando apenas a análise numérica na sua estimativa.

No entanto, a depender da escolha, é possível calcular-se a densidade *a posteriori* sem a exigência de integrações numéricas. De outra forma, caso a densidade de probabilidade *a priori* pertencer à mesma família da densidade *a posteriori*, os cálculos podem ser simplificados. A esse conjunto de densidades *a priori* dar-se o nome de *prioris* conjugadas.

**Tabela 1 – *Prioris* Conjugadas Usuais**

<b>Verossimilhança</b>	<b><i>Priori</i></b>	<b><i>Posteriori</i></b>
$Y \sim B(n, \mu)$	$\theta \sim Beta(p, q)$	$\theta y \sim Beta(p + y, q + n - y)$
$Y \sim P(\theta)$	$\theta \sim Ga(p, q)$	$\theta y \sim Ga\left(p + \sum_{i=1}^n y_i, q + n\right)$
$Y \sim N(\theta, \tau^{-1}), (\tau \text{ conhecido})$	$\theta \sim N(b, c^{-1})$	$\theta y \sim N\left(\frac{cb + n\tau\bar{y}}{c + n\tau}, \frac{1}{c + n\tau}\right)$
$Y \sim Ga(k, \theta), (k \text{ conhecido})$	$\theta \sim Ga(p, q)$	$\theta y \sim Ga\left(p + nk, q + \sum_{i=1}^n y_i\right)$
$Y \sim Geo(\theta)$	$\theta \sim Beta(p, q)$	$\theta y \sim Beta\left(p + n, q + \sum_{i=1}^n y_i - n\right)$
$Y \sim BN(r, \theta)$	$\theta \sim Beta(p, q)$	$\theta y \sim Beta(p + r, q + y - r)$

No entanto, precisa-se destacar que: densidades *a prioris* conjugadas são apenas um instrumento matematicamente conveniente de estimativa para as posteriores.

De modo geral, a utilização de *prioris* conjugadas é suficiente para representar convicções prévias para um nível de aproximação aceitável. Portanto, se não for este o caso, as *prioris* conjugadas não devem ser utilizadas apenas para facilitar o cálculo matemático.

### 2.1.2.2. *Prioris* não informativas

Quando não existe ou é muito vaga a informação sobre a densidade *a priori*, diversos estatísticos propuseram teorias que lidam com essa situação incorporando o que chamamos de densidades *a priori* não informativas (*flat priors*). Tais densidades fornecem a mínima informação possível sobre o parâmetro. Definindo-as como uma densidade que não favorece nenhum valor específico de  $\theta$  em relação a outros, ou seja, uma densidade uniforme com probabilidades equiprováveis para os possíveis valores, ou

uma densidade gaussiana com média zero e desvio padrão extremamente alto, se assemelhando a algo próximo da densidade uniforme.

É comum, ajustar-se uma densidade *a priori* não informativa considerando a medida de informação de Fisher (densidade *a Priori* de *Jeffreys*). Analiticamente têm-se:

$$I(\theta) = E \left[ \left( \frac{\partial \ln f(X|\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \middle| \theta \right] = -E \left[ \frac{\partial^2 \ln f(X|\theta)}{\partial \theta^2} \right]$$

No caso de um vetor paramétrico  $\Theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k)$ ,

$$I(\Theta)_{ij} = E \left[ \left( \frac{\partial \ln f(X|\theta)}{\partial \theta_i} \right) \left( \frac{\partial \ln f(X|\theta)}{\partial \theta_j} \right) \middle| \theta \right]$$

$$I(\Theta)_{ij} = E \left[ \left( \frac{\partial^2 \ln f(X|\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right) \middle| \theta \right]$$

Densidades *a priori* de *Jeffreys* é definida como:

$$\pi(\theta) \propto |I(\theta)|^{1/2}$$

### 2.1.2.3. Mistura de *Prioris*

Uma pequena discursão sobre a utilização de *prioris* conjugadas foi tratada no item 2.1.2.1.. Entretanto, destaca-se que, por muitas vezes a utilização de famílias de *prioris* conjugadas naturais, como na tabela 1, podem ser bastante restritivas na modelagem da densidade *a priori*. Uma possibilidade de flexibilidade em sua especificação, é a mistura de densidades. Tratando analiticamente:

Supondo que  $f_1(\theta), \dots, f_n(\theta)$  são todas distribuições conjugadas para  $\theta$ , levando a posterioris  $f_1(\theta|y), \dots, f_n(\theta|y)$ . Considere a família de mistura das distribuições:

$$f(\theta) = \sum_{i=1}^k p_i f_i(\theta)$$

Então, pela Regra de *Bayes* (sem a constante de normalização):

$$f(\theta|y) \propto f(\theta) f(y|\theta)$$

$$= \sum_{i=1}^k p_i f_i(\theta) f(y|\theta)$$

$$\propto \sum_{i=1}^k p_i^* f_i(\theta|y)$$

Sendo assim, a posteriori pertence à mesma família de misturas que a priori. No entanto, as proporções  $p_i^*$  de mistura de densidades *a posteriori* não necessariamente serão os mesmos da densidade *a priori*,  $p_i$ .

Os pesos,  $p_i^*$ , são obtidos a partir dos pesos,  $p_i$ , e irá depender dos seus respectivos termos constantes para cada termo da mistura. A seguir apresentamos analiticamente:

Sejam as densidades *a priori*,  $f_i(\theta) = C_i K_i(\theta)$ , e *a posteriori*,  $f_i(\theta|y) = C_i^* K_i(\theta|y)$ , isolando os termos independentes têm-se:

$$\begin{aligned} f(\theta|y) &\propto \sum_{i=1}^k p_i f_i(\theta) f(y|\theta) \\ &\propto \sum_{i=1}^k p_i C_i K_i(\theta) L(\theta|y) \\ &\propto \sum_{i=1}^k p_i C_i K_i(\theta|y) \\ &\propto \sum_{i=1}^k p_i \frac{C_i}{C_i^*} f_i(\theta|y) \\ &\propto \sum_{i=1}^k w_i f_i(\theta|y) \end{aligned}$$

Portanto, os pesos são:

$$p_i^* = \frac{w_i}{\sum_i w_i},$$

Em que:

$$w_i = p_i \frac{C_i}{C_i^*}$$

#### 2.1.2.4. Prioris Empíricas

Em um processo genuinamente *Bayesiano*, a definição da densidade *a priori* deve ser formulada independentemente dos dados coletados. No entanto, métodos *Bayesianos* empíricos são amplamente utilizados em análises *Bayesianas*. Sendo assim, a especificação de densidades *a priori* empíricas se sobressaem pela utilização de informações das amostras coletadas, com destaque na utilização da própria estatística descritivas.

#### 2.1.3. Estimativa da densidade *a posteriori* por MCMC - HMC

O método de *Monte Carlo Hamiltoniano (HMC)* é um método de *Monte Carlo* via Cadeia de Markov cuja implementação tem base em conceitos físicos, para gerar a distribuição *a posteriori* de uma forma mais eficiente. Nele é utilizada a Dinâmica Hamiltoniana e o processo de aceitação do método de *Metropolis*.

A principal vantagem do *HMC* em relação aos métodos que realizam as simulações por passeio aleatório é que o processo de convergência, empiricamente, ocorre de maneira mais rápida, ou seja, com um número geralmente bem menor de iterações.

No algoritmo de *Metropolis*, define-se uma distribuição auxiliar,  $q(\bullet|y)$ , cuja função deve ser simétrica em  $y$  e  $x$ . Essa distribuição gera amostragens para um dado  $y^*$ , a partir de  $q(\bullet|y_t)$ , que pode ser rejeitado, analisando-se a razão:

$$r = \frac{p(y^*)}{p(y_t)},$$

sendo  $p(\bullet)$  a distribuição de probabilidade alvo.

Se  $r \geq 1$ , define-se  $y_{t+1} = y^*$ , caso contrário define-se:

$y_{t+1} = y^*$ , com probabilidade  $r$ ,

$y_{t+1} = y_t$ , com probabilidade  $1 - r$ ,

e assim realiza-se esse procedimento para um certo número de iterações.

O método de *Monte Carlo Hamiltoniano* utiliza variáveis de momento,  $\rho$ , incluídas artificialmente no modelo, e define-se a distribuição de probabilidade conjunta:

$$p(\rho, \theta) = p(\rho|\theta)p(\theta)$$

A distribuição de  $\rho$  é independente de  $\theta$ , sendo geralmente atribuído uma distribuição normal multivariada  $\rho \sim N(0, \Sigma)$ , em que  $\Sigma$  é uma matriz de variância-covariância, simétrica, positiva-definida, e geralmente diagonal. Essa matriz usualmente é chamada de “matriz de massa”.

A função de Hamilton é definida a partir da distribuição conjunta  $p(\rho, \theta)$ :

$$H(\rho, \theta) = -\log p(\rho, \theta),$$

$$H(\rho, \theta) = -\log p(\rho|\theta) - \log p(\theta),$$

$$H(\rho, \theta) = T(\rho|\theta) + V(\theta),$$

em que  $T(\rho|\theta) = -\log p(\rho|\theta)$  é chamado de “energia cinética” e  $V(\theta) = -\log p(\theta)$  é a “energia potencial”. Aqui cabe o conceito de conservação de energia, de forma que a função de *Hamilton* permanece invariante.

Iniciando a partir de um estado da variável  $\theta$ , define-se um valor para  $\rho$ , independente  $\theta$ , e que não apresenta persistência ao longo das iterações. A dinâmica de  $\rho$  e  $\theta$  ao longo do tempo  $t$  é definida pelas derivadas parciais da equação de Hamilton:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \rho} = \frac{\partial T}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

Como o momento  $\rho$  é independente de  $\theta$ ,  $p(\rho|\theta) = p(\rho)$ , e assim  $-\partial T/\partial \theta = 0$ . Dessa forma, as derivadas da equação de *Hamilton*, ficam:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

Para resolver as equações diferenciais para os dois estados, utiliza-se aqui o integrador *Leapfrog*, que é um algoritmo de integração numérica adaptado para fornecer resultados estáveis para o *HMC*. Esse algoritmo opera através de etapas de tempo discretas, de um pequeno intervalo  $\epsilon$ , após definir o momento  $\rho$  inicial. Em seguida, ele alterna entre uma atualização em  $t + \epsilon/2$  para  $\rho$ , e uma atualização em  $t + \epsilon$  para  $\theta$  e  $\rho$ , da seguinte forma:

$$\rho^{(t+\epsilon/2)} \leftarrow \rho^{(t)} - \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial V^{(t)}}{\partial \theta}$$

$$\theta^{(t+\epsilon)} \leftarrow \theta^{(t)} + \epsilon \Sigma \rho^{(t+\epsilon/2)}$$

$$\rho^{(t+\epsilon)} \leftarrow \rho^{(t+\epsilon/2)} - \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial V^{(t+\epsilon)}}{\partial \theta}$$

Após  $L$  repetições das etapas acima, é realizada uma simulação para  $L\epsilon$  períodos discretos de tempo e o estado final resultante desse processo é denotado como  $(\rho^*, \theta^*)$ . Como a atualização de uma variável depende somente da outra variável, as atualizações feitas pelo método de *Leapfrog* mantém o “volume” da distribuição constante após mapear seus pontos com o integrador.

A distribuição que se pretende amostrar é obtida a partir de outro conceito físico (função de energia potencial, pelo conceito de distribuição canônica da mecânica estatística). A função de densidade da distribuição conjunta,  $P(\rho, \theta)$ , fica definida como:

$$P(\rho, \theta) = \frac{1}{Z} \exp(-H(\rho, \theta)),$$

sendo  $Z$  uma constante para garantir que  $\int_{-\infty}^{+\infty} P(\rho, \theta) = 1$ .

No processo de integração de *Leapfrog* é aplicada a condição de aceitação do método de Metropolis. A probabilidade de se aceitar a transição do estado  $(\rho, \theta)$  para o estado  $(\rho^*, \theta^*)$ , após as  $L$  repetições é:

$$\min(1, \exp(H(\rho, \theta) - H(\rho^*, \theta^*)))$$

Se o estado proposto não for aceito, o parâmetro retorna para seu valor anterior, e a próxima iteração é iniciada a partir dele.

### 2.1.3.1. Convergência

Na prática, não é possível afirmar com certeza que, após um dado número de iterações, uma cadeia convergiu para uma distribuição estacionária. Porém, existem alguns testes que indicam que essa convergência pode ter ocorrido. Possivelmente o teste mais utilizado para fazer essa verificação, é o diagnóstico de *Gelman-Rubin*.

Sua aplicação ocorre após a simulação de  $n$  realizações para  $m$  cadeias paralelas, iniciando de pontos diferentes de um espaço  $\pi$ . Escolhendo uma função escalar  $\omega$ , pertencente ao espaço  $\pi$ ,  $\omega_{ij}$  é a  $i$ -ésima realização para a  $j$ -ésima cadeia. A “variância” entre as cadeias é definida por:

$$B = \frac{n}{m-1} \sum_{j=1}^m (\bar{\omega}_j - \bar{\omega})^2 = 1,$$

em que  $\bar{\omega}$  é a média total para todas as  $mn$  realizações e  $\bar{\omega}_j$  é a média das  $n$  realizações da cadeia  $j$ .

A variância dentro das cadeias é definida como uma média da variância dentro de cada cadeia:

$$W = \frac{1}{m(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\omega_{ij} - \bar{\omega}_j)^2,$$

Os valores de  $B$  e  $W$ , se a cadeia for ergódica, com  $n \rightarrow \infty$ , serão estimações consistentes da variância de  $\omega$ ,  $\sigma^2$ , assim como a média ponderada deles:

$$\hat{\sigma}_\omega^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)W + \left(\frac{1}{n}\right)B,$$

A verificação de convergência é feita a partir da estatística de *Gelman-Rubin*:

$$R = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_\omega^2}{W}},$$

Se os pontos iniciais da cadeia estão mais dispersos relativamente à variância esperada para  $\omega$ , a variância entre as cadeias  $B$  também ficará acima da variância de  $\omega$ . E a variância dentro das cadeias  $W$ , no início, tende a ficar abaixo da variância de  $\omega$ , já que ainda não explorou completamente o espaço de estados. Dessa forma, a estatística de *Gelman-Rubin*,  $R$ , tende a ser maior do que 1 no início da cadeia, mas se aproxima desse valor conforme aumenta o comprimento da cadeia.

### 2.1.4. Inferência

Uma análise *Bayesiana* entrega uma inferência bem mais completa em termos de informação, no sentido de que todo o conhecimento acumulado a respeito de  $\theta$ , incorporado na densidade *a priori* e nos dados, é representado pela densidade *a posteriori*.

No entanto, em avaliações de bens imóveis, deseja-se inferir o valor do bem através de uma estimativa pontual e intervalar. O que se torna possível através da estimativa dos coeficientes da densidade a posteriori.

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Deseja-se avaliar um apartamento de 150m<sup>2</sup> de área privativa, com 2 quartos, sendo 2 suítes, 1 WC social, 3 vagas de garagem e 1 quarto com banheiro de empregada. Para avaliação foram coletados vinte dados de mercado relativos às Áreas Privativas em m<sup>2</sup> (AP), Quartos, Vagas de Garagem, número de WC com peso 0,5 para banheiro de empregada e 1 WC para suíte e os respectivos preços unitários em R\$/m<sup>2</sup> (PU), conforme tabela 1. Com base nos dados coletados, analisou-se o valor de mercado de compra e venda do apartamento avaliando utilizando a inferência clássica e a bayesiana.

**Tabela 1 – Dados coletados**

Dados	Área	Quartos	Garagem	WC	Pu( R\$/m <sup>2</sup> )
1	122.00	3.00	1.00	3.50	5081.97
2	157.00	4.00	3.00	3.50	6050.96
3	196.00	4.00	3.00	3.00	4591.84
4	175.00	4.00	2.00	5.00	5628.57
5	131.00	3.00	2.00	2.50	4961.83
6	200.00	4.00	2.00	2.50	4500.00
7	108.00	3.00	2.00	2.50	5833.33
8	137.00	4.00	2.00	5.50	6569.34
9	117.00	3.00	2.00	2.50	5555.56
10	167.00	4.00	2.00	7.50	5988.02
11	136.00	4.00	2.00	5.50	6577.21
12	163.00	4.00	3.00	4.50	6134.97
13	130.00	4.00	2.00	3.50	7067.20
14	132.00	4.00	2.00	3.00	6818.18
15	149.00	4.00	2.00	4.50	6577.18
16	158.00	4.00	2.00	3.50	5632.91
17	160.00	4.00	2.00	2.50	5562.50
18	127.00	4.00	2.00	2.50	7086.61
19	162.00	4.00	2.00	3.00	5833.33
20	120.00	3.00	1.00	2.50	5000.00

#### 3.1. Inferência Clássica – Regressão Linear por MMQ

Em seguida, foi realizado a análise exploratória e possíveis mudanças de escalas (direta – x ou logarítmica – Ln (x) com o objetivo de identificar o melhor ajuste inferencial. Portanto, temos que:

**Tabela 2 – Correlações e aderência da melhor escala**

	Área	Ln(Área)	Quartos	Ln(Quartos)	Garagem	Ln(Garagem)	WC	Ln(WC)	Pu( R\$/m <sup>2</sup> )	Ln(Pu( R\$/m <sup>2</sup> ))
Área	1									
Ln(Área)	0.996	1								
Quartos	0.643	0.682	1							
Ln(Quartos)	0.643	0.682		1						
Garagem	0.511	0.518	0.522	0.522	1					
Ln(Garagem)	0.495	0.505	0.576	0.576	0.974	1				
WC	0.208	0.247	0.411	0.411	0.102	0.128	1			
Ln(WC)	0.217	0.260	0.453	0.453	0.139	0.155	0.986	1		
Pu( R\$/m <sup>2</sup> )	-0.383	-0.333	0.432	0.432	0.112	0.198	0.333	0.368	1	
Ln(Pu( R\$/m <sup>2</sup> ))	-0.394	-0.342	0.418	0.418	0.111	0.197	0.351	0.386	0.998	1

**Tabela 3- Dados tratados**

Dados	Área	Quartos	Ln(Garagem)	Ln(WC)	Ln(Pu( R\$/m²))
1	122.00	3.00	0.00	1.25	8.53
2	157.00	4.00	1.10	1.25	8.71
3	196.00	4.00	1.10	1.10	8.43
4	175.00	4.00	0.69	1.61	8.64
5	131.00	3.00	0.69	0.92	8.51
6	200.00	4.00	0.69	0.92	8.41
7	108.00	3.00	0.69	0.92	8.67
8	137.00	4.00	0.69	1.70	8.79
9	117.00	3.00	0.69	0.92	8.62
10	167.00	4.00	0.69	2.01	8.70
11	136.00	4.00	0.69	1.70	8.79
12	163.00	4.00	1.10	1.50	8.72
13	130.00	4.00	0.69	1.25	8.86
14	132.00	4.00	0.69	1.10	8.83
15	149.00	4.00	0.69	1.50	8.79
16	158.00	4.00	0.69	1.25	8.64
17	160.00	4.00	0.69	0.92	8.62
18	127.00	4.00	0.69	0.92	8.87
19	162.00	4.00	0.69	1.10	8.67
20	120.00	3.00	0.00	0.92	8.52

Partindo então para a regressão através do método dos mínimos quadrados, temos os resultados apresentados na tabela 4:

**Tabela 4 – Resultados da Regressão Linear**

RESUMO DOS RESULTADOS								
<i>Estatística de regressão</i>								
R múltiplo	97.83%							
R-Quadrado	95.70%							
R-quadrado ajustado	94.56%							
Erro padrão	0.032							
Observações	20							
<i>ANOVA</i>								
	<i>gl</i>	<i>SQ</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>F de significação</i>			
Regressão	4	3.318E-01	8.295E-02	8.350E+01	0.000000046%			
Resíduo	15	1.490E-02	9.934E-04					
Total	19	3.467E-01						
	<i>Coefficientes</i>	<i>Erro padrão</i>	<i>Stat t</i>	<i>valor-P</i>	<i>95% inferiores</i>	<i>95% superiores</i>	<i>Inferior 95.0%</i>	<i>Superior 95.0%</i>
Interseção	8.300	0.065	126.763	0.00%	8.161	8.440	8.161	8.440
Área	- 0.006	0.000	- 15.996	0.00%	- 0.007	- 0.005	- 0.007	- 0.005
Quartos	0.297	0.026	11.640	0.00%	0.243	0.352	0.243	0.352
Ln(Garagem)	0.085	0.033	2.595	2.03%	0.015	0.156	0.015	0.156
Ln(WC)	0.066	0.025	2.688	1.69%	0.014	0.119	0.014	0.119

Apresentando resultados para os valores-p, F de significação dentro das recomendações da NBR 14653-2, atingindo, inclusive, o GRAU III.

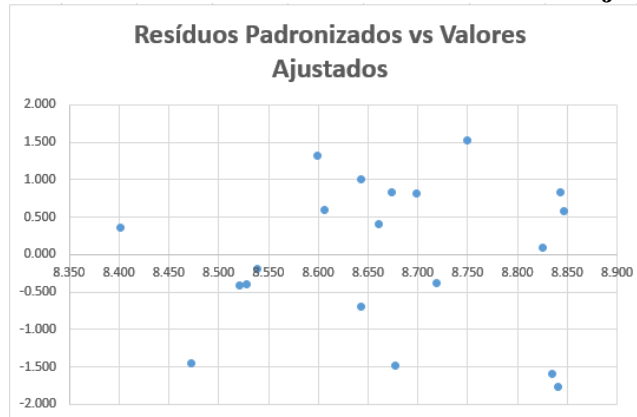
Um coeficiente de correlação(R<sup>2</sup>) de 95,7%, deixando de representar apenas 4,3% da variabilidade dos preços praticados pelo mercado.

Analisando os gráficos exigidos para os pressupostos básicos da regressão linear:

**Gráfico 1 – Normalidade dos Resíduos**



**Gráfico 2 – Resíduos Padronizados vs Valores Ajustados**



**Gráfico 3 – Preços Observados vs Valores Ajustados**



**Gráfico 4 – Histograma dos Resíduos**



Uma vez que os pressupostos básicos estiverem de acordo com o exigido pela regressão linear é possível partir para a montagem da equação que representa a variabilidade dos dados, portanto a partir dos coeficientes da tabela 4:

$$Pu_{Clássica} = 4025,038 * 0,994^A * 1,346^{Quartos} * G^{0,085} * WC^{0,66}$$

Interpretação: Em condições de Ceteris Paribus:

- A cada aumento de 1m<sup>2</sup> em A, o Pu diminui em 0,6%;
- A cada aumento de 1 Quarto, o Pu aumenta em 34,6%;
- A cada aumento de 1 Vaga de Garagem, o Pu aumento em 8,5%;
- A cada aumento de 1 WC, o Pu aumenta em 66%

Realizando a avaliação do Apartamento em análise,

$$A = 150m^2, Quarto = 3, Vaga de Garagem = 3, WC = 3,5;$$

Substituindo os valores na equação do Pu:

$$Pu_{Clássica} = 4025,038 * 0,994^{(150)} * 1,346^{(3)} * (3)^{0,085} * (3,5)^{0,66}$$

$$Pu_{Clássica} = \frac{R\$9988,56}{m^2};$$

Portanto:

$$Pt_{Clássica} = Pu_{Clássica} * A;$$

$$Pt_{Clássica} = 9988,56 * 150;$$

$$Pt_{Clássica} = R\$1.498.284,54;$$

Com limites superior e inferior para o intervalo de confiança de 80% em torno do Pt:

$$LI = R\$1.441.652,45;$$

$$LS = R\$1.557.141,30;$$

Fornecendo um Grau de Precisão de:

$$GP = \frac{LS - LI}{Pt} = 7,71\%$$

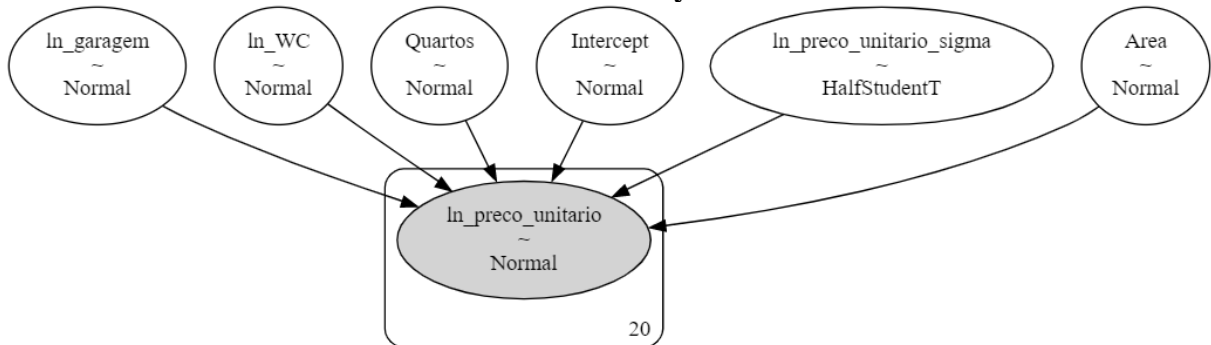
### **3.2. Inferência Bayesiana – Regressão Linear por MCMC - HMC**

Na estimativa do valor do apartamento avaliando através da inferência bayesiana, é necessário determinar os parâmetros do modelo da posteriori a partir da função de verossimilhança, das variáveis com suas respectivas funções de densidade de probabilidade a priori e os parâmetros de simulação.

Na modelagem, com o objetivo de reproduzir uma a estimativa do valor de mercado do apartamento obtido no item 4.1., define-se o modelo a Posteriori, com seus parâmetros

a serem inferidos, como sendo resultado uma p.d.f. Gaussiana para a função de verossimilhança, na qual, tem em sua composição, todas as variáveis coletadas e o erro aleatório:

**Gráfico 5 – Modelo bayesiano**



Matematicamente, tem-se:

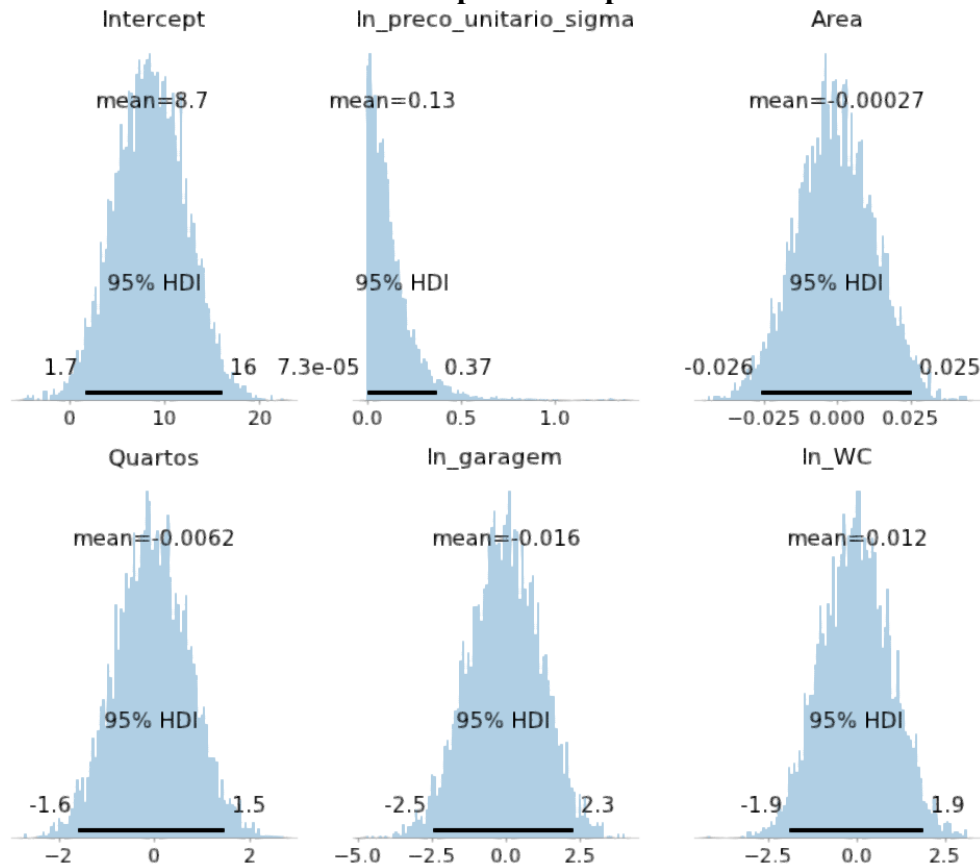
$$\begin{aligned}
 y_i|x_i &\sim f(y|x_i), \quad i = 1, \dots, n \\
 f(y|x) &= \mathcal{N}(y|x^T\beta, \sigma^2) \\
 \beta_0 &\propto 1 \\
 \beta_k|\sigma^2 &\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2\nu\beta), \quad k = 1, \dots, p \\
 \sigma^2 &\sim \mathcal{HT}(\alpha, \nu)
 \end{aligned}$$

No qual, em seus parâmetros de simulação, definiu-se o algoritmo de amostragem como sendo *Markov Chain Monte Carlo (MCMC)*, especificamente o NUTS, no qual adota-se um método de análise na definição de qual método entre o *Hamiltoniano (HMC)*, amostragem de *Gibbs* ou *Metropolis-Hastings* se adequa melhor aos dados. Neste artigo foi utilizado o *HMC*.

Definiu-se a utilização de 4 cadeias de *Markov* onde, seriam amostradas 10.000 realizações dos parâmetros para o ajuste/treinamento (*tune*), e em seguida, a amostragem de 20.000 realizações para o cálculo e definição da posteriori. Fazendo um total de 120.000 realizações total.

Em seguida define-se as funções de densidade de probabilidade das prioris dos parâmetros utilizados no modelo.

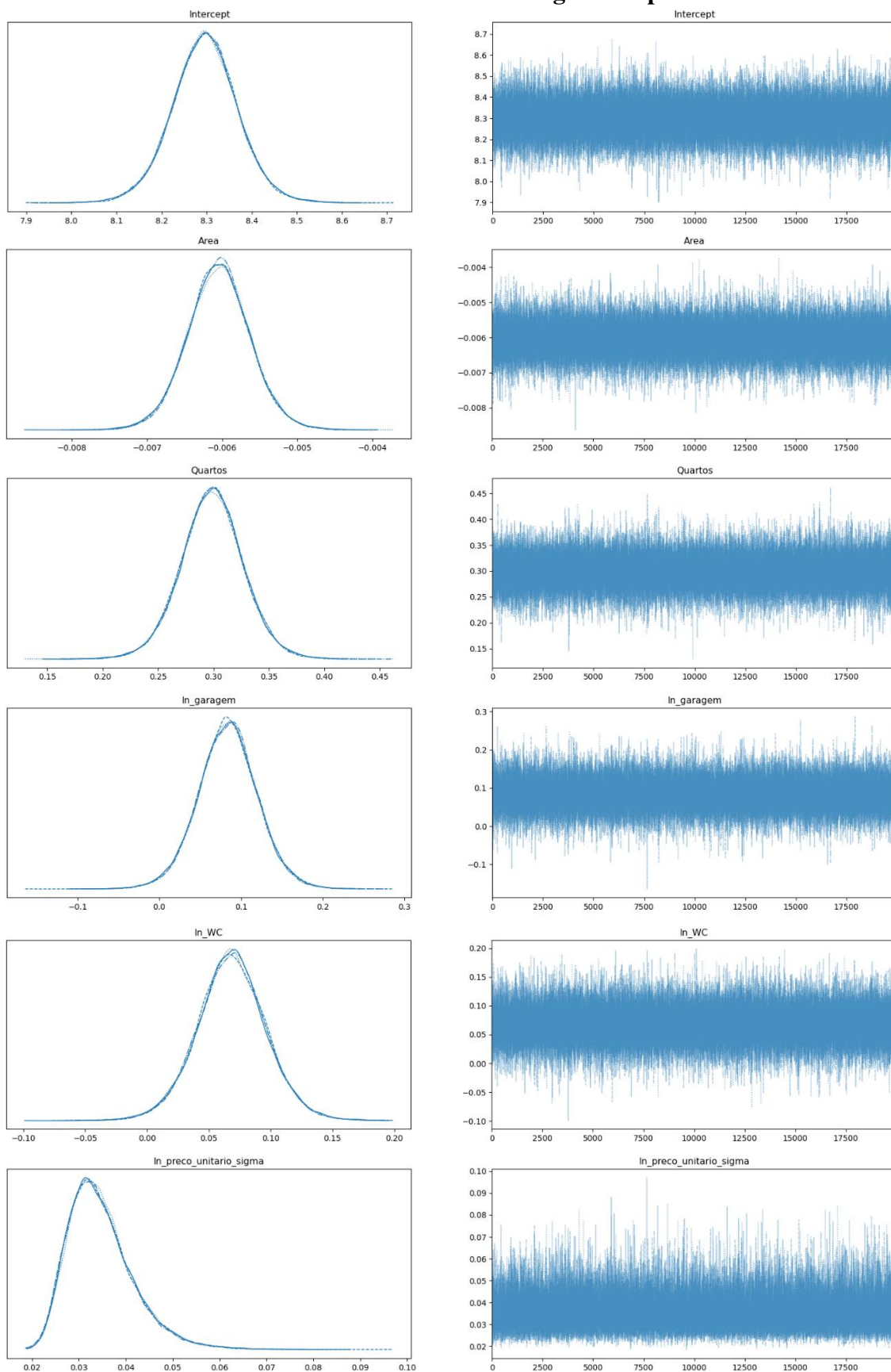
**Gráfico 6 – p.d.f.'s das prioris**



Na definição das p.d.f.'s a priori utilizamos o conceito das prioris pouco informativas (*Weakly Informative Priors*), na qual seu uso se torna bem atraente na modelagem inferencial, uma vez que, define-se uma escala apropriada a partir dos próprios dados e às utiliza como princípio de regularização na análise.

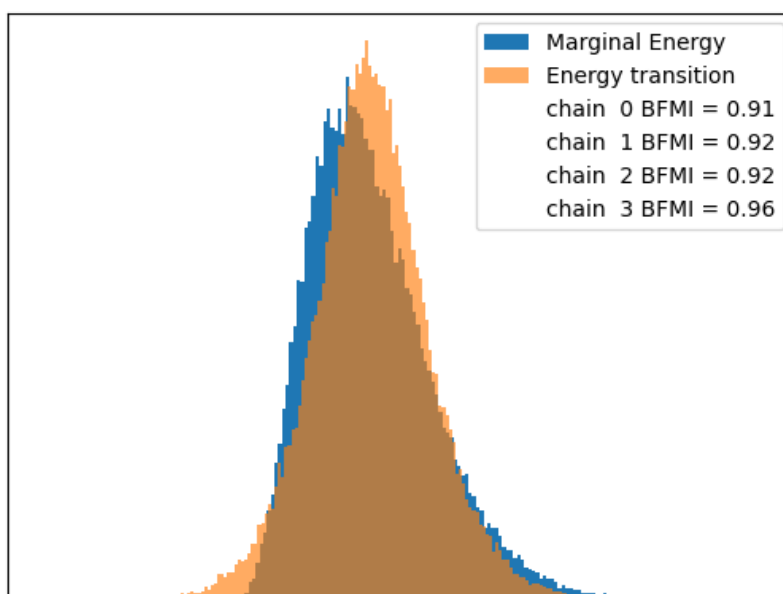
Sendo assim, após a definição dos dados iniciais, é dado seguimento nas simulações para a obtenção da posteriori, portanto analisando os resultados da amostragem pelos gráficos 7 e 8, tem-se:

**Gráfico 7 – Resultados da amostragem das priors**



Na amostragem, verifica-se que, nas quatro cadeias de *Markov* utilizadas, foi obtido a mesma convergência das p.d.f.s para as respectivas variáveis, indicando parâmetros semelhantes (lado esquerdo). Adicionalmente, não é verificada tendências ou padrões na série temporal da amostragem (lado direito). Indicando uma boa amostragem para as prioris.

**Gráfico 8 – Energia Marginal da amostragem vs Energia de Transição entre as simulações - NUTS**



Além da verificação de tendências e padrões na amostragem é necessário a análise do algoritmo utilizado, o NUTS, na qual a partir do gráfico 8 é possível verificar, com a sobreposição da Energia Marginal e Energia de Transição e o fator BFMI (*Bayesian fraction of missing information*), se o algoritmo explorou o máximo possível da densidade *a posteriori*.

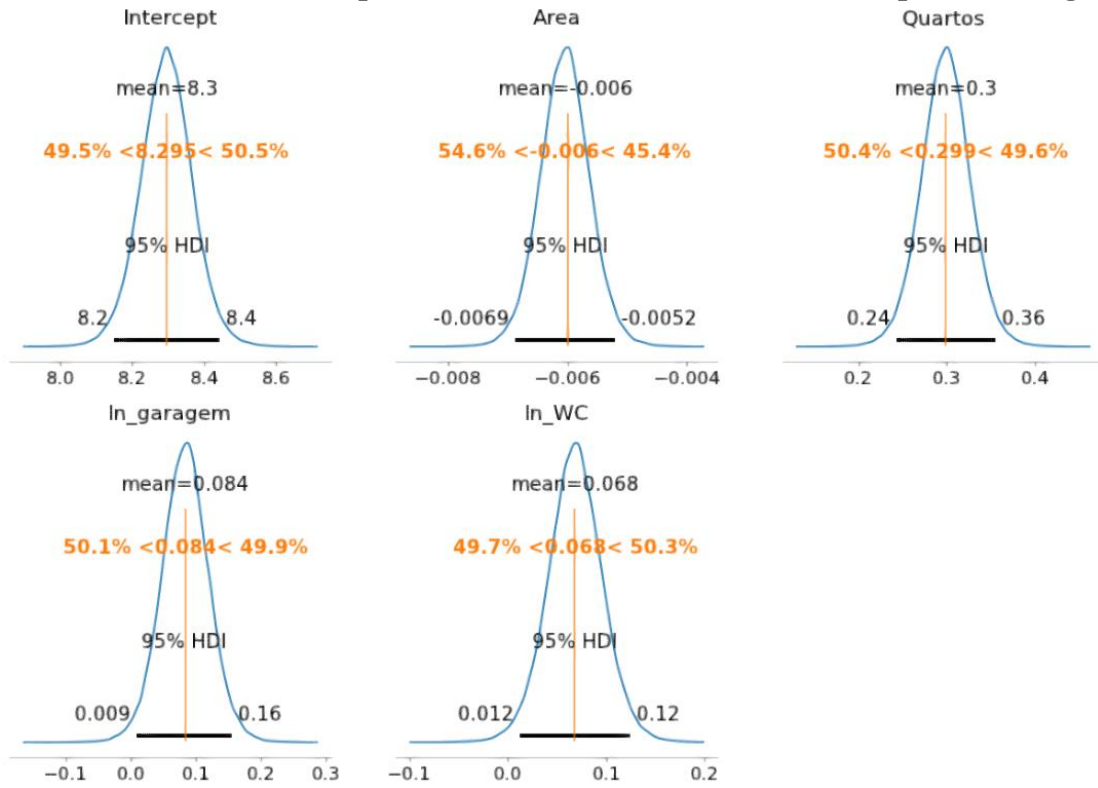
Sendo assim, a sobreposição das p.d.f.s obtidas no gráfico 8, parecem se ajustar bem, o que pode ser confirmado através do fator BFMI para cada cadeia de Markov, conseguindo representar entre 91% a 96% da densidade *a posteriori*.

Uma vez que a amostragem esteja de acordo com o esperado, dá-se sequência na obtenção dos coeficientes, seus intervalos de credibilidades e alguns testes de diagnóstico necessários para a verificação do ajuste da modelagem:

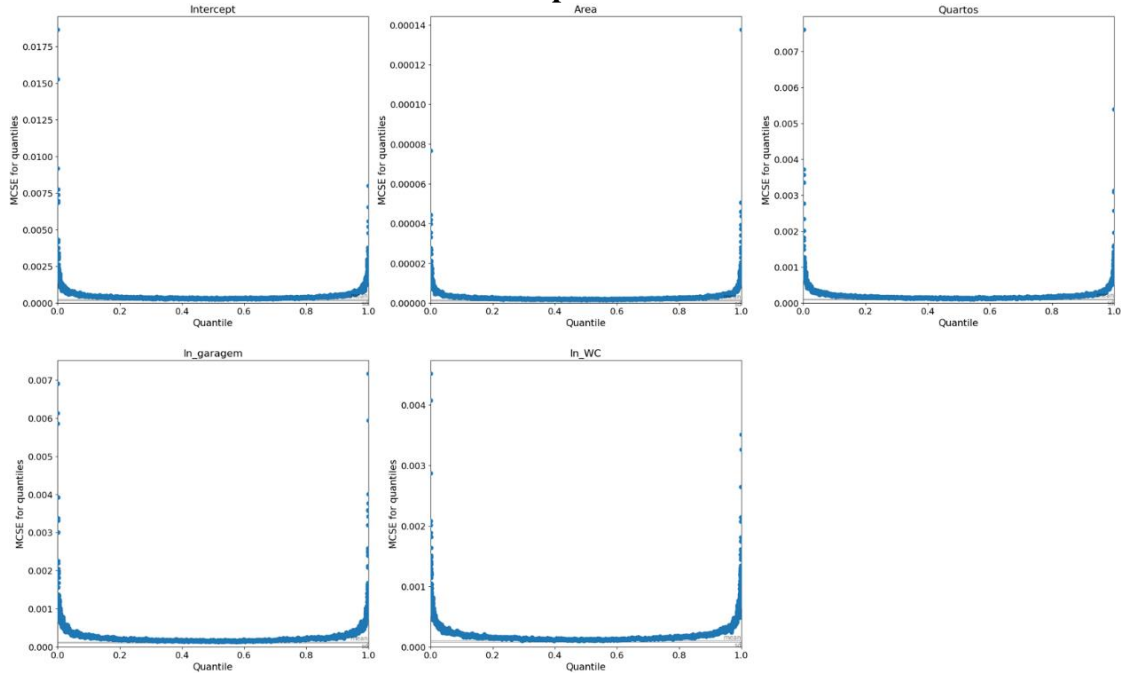
**Tabela 5 – Resultados da Inferência Bayesiana**

	mean	sd	Hdi_3%	Hdi_97%	Mcse_mean	Mcse_sd	Ess_bulk	Ess_tail	r-hat
<b>Intercept</b>	8,295	0,073	8,158	8,436	0,0	0,0	83740	67627	1
<b>Area</b>	-0,006	0,000	-0,007	-0,005	0,0	0,0	74646	55748	1
<b>Quartos</b>	0,299	0,028	0,244	0,352	0,0	0,0	60382	52870	1
<b>Ln_garagem</b>	0,084	0,037	0,015	0,154	0,0	0,0	77106	56080	1
<b>Ln_WC</b>	0,068	0,028	0,016	0,122	0,0	0,0	74005	53428	1
<b>Sigma</b>	0,035	0,007	0,023	0,048	0,0	0,0	48384	40519	1

**Gráfico 9 – Estimativa das priors com intervalo de credibilidade após amostragem**

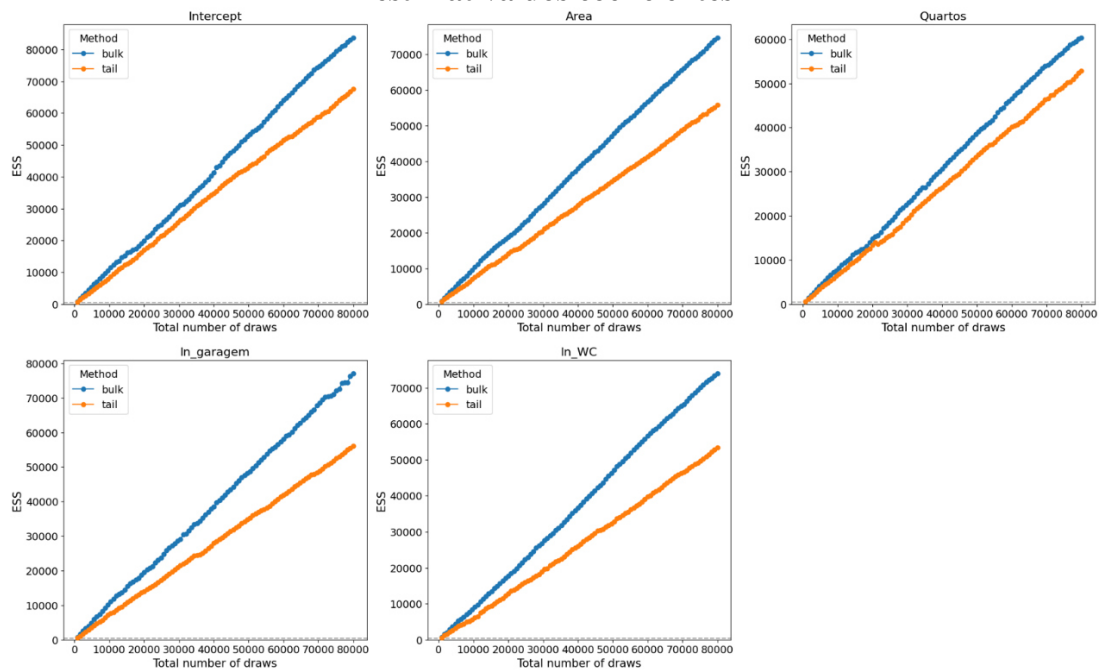


**Gráfico 10 – Estimativa do erro padronizado da cadeia de Markov**

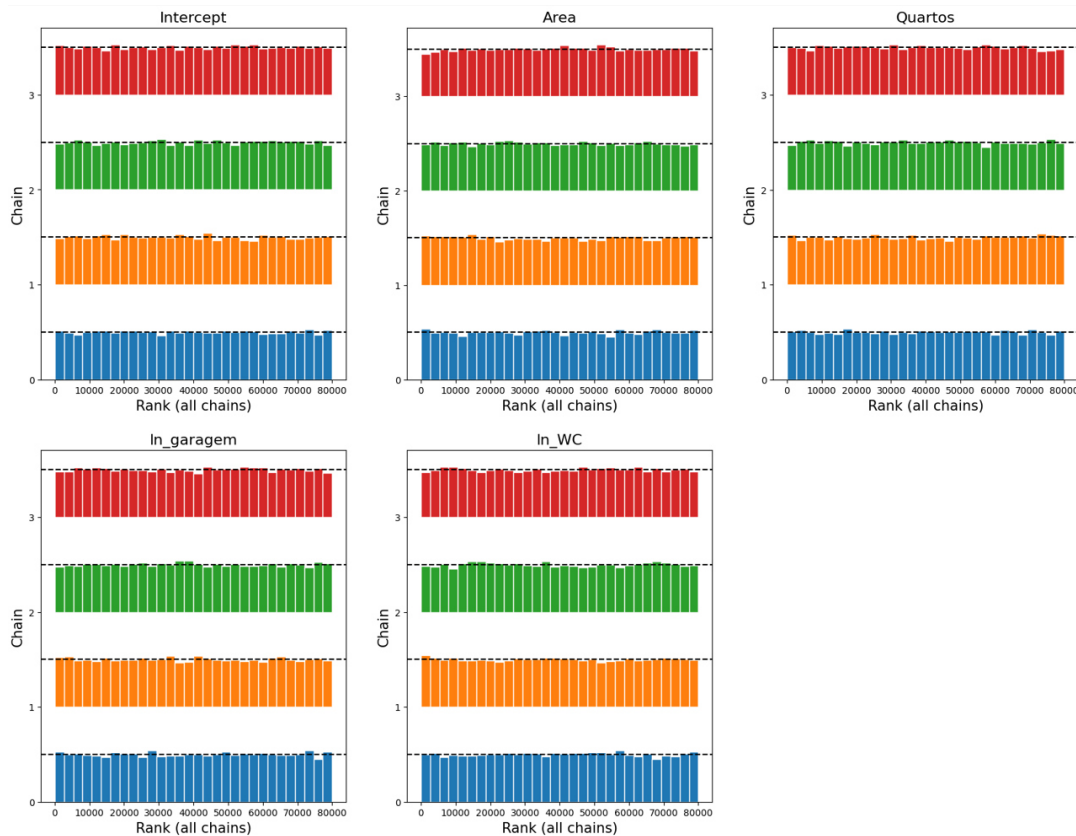


Fonte: o Autor.

**Gráfico 11 – Estimativa da quantidade de realizações efetivamente utilizada na estimativa dos coeficientes**



**Gráfico 12 – Estimativa do teste de diagnóstico de convergência da cadeia de markov**



Os resultados das médias (*mean*) obtidos para cada coeficiente na tabela 5 se assemelham aos coeficientes obtidos na tabela 4. No qual, nos indica uma grande possibilidade de semelhança na estimativa do valor do apartamento avaliando.

Da tabela 5, temos outras informações de grande importância para a inferência:

1. Assim como esperado, as variáveis na inferência bayesiana são tratadas como variáveis aleatórias representadas por p.d.f.s gaussianas com média (*mean*) e desvio padrão (*sd*);
2. O intervalo de credibilidade, gráfico 9, com 3% (*Hdi\_3%*) e 97% (*Hdi\_97%*) indica de forma probabilística a pertinência do parâmetro ao intervalo destacado;
3. O erro padronizado da cadeia de Markov, gráfico 10, medido em média (*Mcse\_mean*) e desvio padrão (*Mcse\_sd*), apresentam valores próximos à 0;
4. A quantidade efetivamente utilizada de realizações da amostragem, gráfico 11, para cada parâmetro para representar o centro (*Ess\_bulk*) e as caudas (*Ess\_tail*). Diz-se que o modelo está convergindo adequadamente quando as duas linhas apresentam um comportamento aproximadamente linear;
5. O teste de diagnóstico de convergência normalizado das Cadeias de Markov (*r\_hat*), gráfico 12, no qual a unidade representa a convergência entre as variâncias das cadeias.

Adotando os mesmos procedimentos da inferência clássica, podemos realizar a estimativa do valor do apartamento avaliando através da equação de inferência utilizando os valores médios dos coeficientes obtidos da amostragem, portanto:

$$Pu_{Bayes} = 4003,803 * 0,994^A * 1,349^{Quartos} * G^{0,084} * WC^{0,68}$$

Realizando a avaliação do Apartamento em análise,

$$A = 150m^2, Quarto = 3, Vaga de Garagem = 3, WC = 3,5;$$

Substituindo os valores na equação do Pu:

$$Pu_{Bayes} = 4003,803 * 0,994^{(150)} * 1,349^{(3)} * (3)^{0,084} * (3,5)^{0,68}$$

$$Pu_{Bayes} = \frac{R\$10.244,97}{m^2};$$

Portanto:

$$Pt_{Bayes} = Pu * A;$$

$$Pt_{Bayes} = 10.244,97 * 150;$$

$$Pt_{Bayes} = R\$1.536.745,41;$$

Analisando o desvio dos valores do apartamento avaliando obtidos nas inferências Bayesiana e clássica, tem-se:

$$R = \frac{Pt_{Bayes} - Pt_{Clássica}}{Pt_{Bayes}};$$

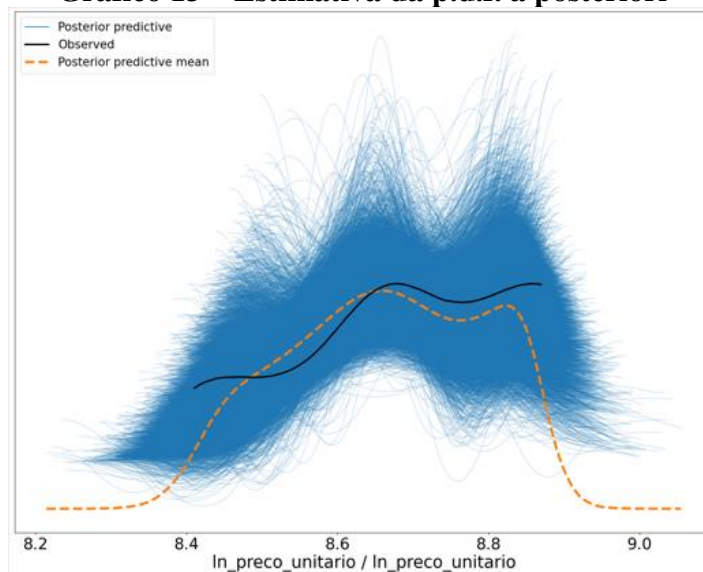
$$R = \frac{R\$1.536.745,41 - R\$1.498.284,54}{R\$1.536.745,41};$$

$$R = 2,503\%$$

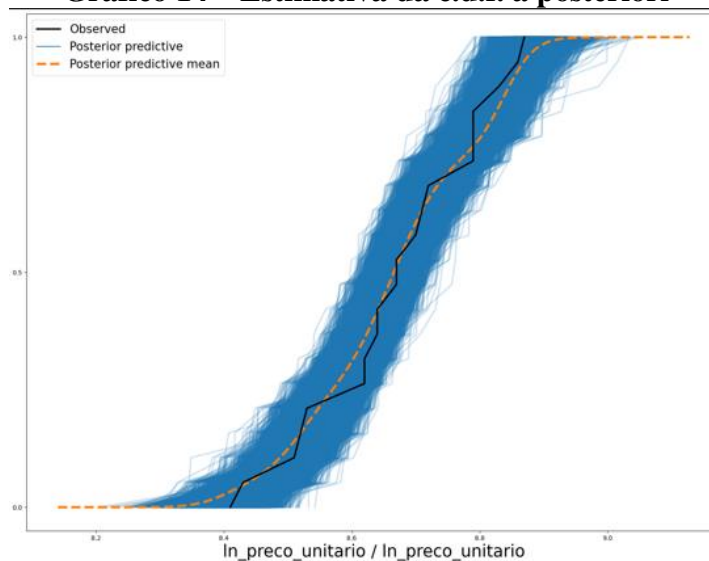
Obtendo um desvio de apenas 2,5% na estimativa do valor de compra e venda do avaliando, pode-se validar a estimativa através da inferência *Bayesiana*.

No entanto, através de uma abordagem *Bayesiana*, na estimativa da p.d.f. *a posteriori* que represente a variabilidade dos preços pesquisados, verifica-se alguns detalhes importantes a serem observados:

**Gráfico 13 – Estimativa da p.d.f. a posteriori**



**Gráfico 14 – Estimativa da c.d.f. a posteriori**



Nos gráficos 13 e 14, verifica-se que:

1. Os dados observados (linha preta), carecem de informações sobre as caudas, o que pode ocasionar uma má interpretação na análise da presença de *outliers*, podendo levar a estimativas do apartamento avaliando enviesadas;
2. A amostragem a partir da *MCMC* (nuvem azul), assim como já analisado, percorre toda a extensão dos dados coletados, apresentando resultados bem precisos e acurados na inferência;
3. A curva obtida pela média da amostragem do *MCMC* (linha tracejada laranja) representa bem melhor a variabilidade dos preços praticados pelo mercado, inclusive as caudas, dando uma maior confiabilidade na estimativa dos preços.

Conclui-se então que, mesmo com os excelentes resultados dos testes de hipóteses obtidos pela inferência clássica, os dados coletados carecem de informações, o que podem levar o analista a resultados tendenciosos, principalmente na análise de *outliers*.

No entanto, a inferência *Bayesiana*, a partir do poder da análise das simulações de *Monte Carlo* consegue reproduzir cenários bem mais completos da variabilidade dos preços praticados pelo mercado, produzindo resultados bem mais confiáveis.

#### **4. CONCLUSÃO**

Assim como esperado, os resultados obtidos pela inferência bayesiana fornecem uma maior quantidade de informações ao analista, com a garantia dos pressupostos fazendo com que a tomada de decisão seja mais precisa e acurada.

Os coeficientes obtidos pelas inferências clássica e bayesiana foram equivalentes, indicando que o valor encontrado pela estimativa pontual do imóvel avaliando pode ser determinada por quaisquer dos métodos.

A função de densidade de probabilidade representando a variabilidade dos preços de oferta praticados pelo mercado obtida pela simulação de monte carlo, na inferência bayesiana, foi bem mais completa do que a encontrada pela pesquisa do mercado, indicando inclusive a ausência de caudas bem definidas, o que pode levar a um problema na análise da presença de *outliers*, na inferência clássica.

Recomenda-se, em trabalhos futuros, a análise da inferência bayesiana com a incorporação de diferentes tipos de variáveis qualitativas e outras p.d.f.s na representação dos parâmetros e da verossimilhança, além da gaussiana.

## 5. REFERÊNCIAS

Biblioteca em R: <https://mc-stan.org/rstanarm/articles/priors.html>.

Biblioteca em Python: <https://bambinos.github.io/bambi/index.html>.

CATTY, J. P., **IFRS: Guia de Aplicação do Valor Justo**, Ed. Bookman.

DANTAS, Rubens Alves; **Engenharia de Avaliações: Uma Introdução à Metodologia Científica**, 3ª edição, Ed. Pini.

GUJARATI, Damodar N., PORTER, Dawn C., **Econometria Básica**, 5ª edição, Ed. Bookman.

HOFFMAN; M. D.; GELMAN, A. **The No-U-Turn Sampler: Adaptively Setting Path Lengths in Hamiltonian Monte Carlo**. Journal of Machine Learning Research, v. 15, p. 1351-1381, 2014.

Michael Betancourt, **How the Shape of a Weakly Informative Prior Affects Inferences** (mc-stan.org)

NEAL, R. M. MCMC using Hamiltonian dynamics. In BROOKS, S.; GELMAN, A.; JONES, G. L.; MENG, X. L. (ed.) **Handbook of Markov Chain Monte Carlo**. Boca Raton: Chapman and Hall–CRC Press, 2011. cap. 5, p. 113-162.

NBR 14653 - **Avaliação de Bens parte 1 e 2: Procedimentos Gerais**.

NBR 14653-2- **Avaliação de Bens parte 2: Imóveis Urbanos**.

Paulino, C.D., Turkman, M.A.A. and Murteira, B. (2003). **Estatística Bayesiana, Fundação Calouste Gulbenkian**, Lisboa.

Rafael L. B., Márcio P. L., **Estimação da estrutura a termo da taxa de juros por Inferência Bayesiana: uma aplicação do método de Monte Carlo Hamiltoniano**.

Tomás Capretto, Camen Piho, Ravin Kumar, Jacob Westfall, Tal Yarkoni, Osvaldo A. Martin, **Bambi: A simple interface for fitting Bayesian linear models in Python**.

Nassim Nicholas Taleb, **STATISTICAL CONSEQUENCES OF FAT TAILS - Real World Preasymptotics, Epistemology, and Applications**, Stem Academy Press.